



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Matúš Dzurilla

Edgeworthův rozvoj

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Marek Omelka, PhD.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika
a ekonometrie

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Rád by som poďakoval vedúcemu tejto práce, doc. Ing. Marekovi Omelkovi, PhD., za poskytnutý čas na všetkých konzultáciách. Naďalej by som rád poďakoval mojej rodine a kamarátom, ktorí ma v písaní práce podporovali.

Název práce: Edgeworthův rozvoj

Autor: Matúš Dzurilla

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Marek Omelka, PhD., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Táto práca sa zaoberá Edgeworthovým rozvojom pre aproximáciu rozdelenia odhadu parametra. Úloha práce je uviesť pojem Edgeworthov rozvoj, zaviesť jeho predpoklady a s nimi súvisiace termíny. Následne ukázať postup pre odvodenie prvého člena Edgeworthovho rozvoja. Nakoniec túto aproximáciu demonštrovať na príkladoch, porovnať ho s inými aproximáciami (hlavne centrálnou limitnou vetou) a ukázať silné a slabé stránky Edgeworthovho rozvoja.

Klíčová slova: Edgeworthov rozvoj, charakteristická funkcia, centrálna limitná veta

Title: Edgeworth expansion

Author: Matúš Dzurilla

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. Ing. Marek Omelka, PhD., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This thesis is focused around Edgeworth's expansion for approximation of distribution for parameter estimation. Aim of the thesis is to introduce term Edgeworth's expansion, its assumptions and terminology associated with it. Afterwards demonstrate process of deducting first term of Edgeworth's expansion. In the end demonstrate this deduction on examples and compare it with different approximations (mainly central limit theorem), and show strong and weak points of Edgeworth's expansion.

Keywords: Edgeworth's expansion, characteristic function, central limit theorem

Obsah

Úvod	3
1 Úvod do Edgeworthovho rozvoja	4
1.1 Motivačný príklad	4
1.2 Odvodenie Edgeworthovho rozvoja	5
1.2.1 Zavedenie kumulantov a ich vzťah s momentami	5
1.2.2 Vyjadrenie charakteristickej funkcie S_n	7
1.2.3 Taylorov rozvoj logaritmu charakteristickej funkcie S_n . . .	8
1.2.4 Vyjadrenie charakteristickej funkcie S_n ako násobok cha- rakteristickej funkcie $N(0,1)$ a polynómu	9
1.2.5 Odvodenie prvých dvoch členov rozvoja charakteristickej funkcie S_n ako násobok charakteristickej funkcie $N(0,1)$ a polynómu	11
1.2.6 Prechod z vyjadrenia S_n za pomoci charakteristickej funkcie ku vyjadreniu S_n za pomoci distribučnej funkcie	13
1.2.7 Prepis členov polynómu za pomoci hustoty $N(0,1)$ a jej de- rivácií	14
1.2.8 Finálne vyjadrenie distribúcie pôvodného rozdelenia	18
1.2.9 Diskusia a možné riešenie problému konvergenencie	18
1.3 Príklad na exponenciálnom rozdelení	19
1.3.1 Normálna aproximácia	19
1.3.2 Edgeworthov rozvoj s jedným a dvoma členmi	19
1.3.3 Presné rozdelenie	20
1.3.4 Grafické porovnanie	20
1.3.5 Problémy Edgeworthovej aproximácie	22
2 Zovšeobecnenie Edgeworthovho rozvoja	25
2.1 Edgeworthov rozvoj pre hladkú transformáciu priemeru náhodných veličín	25
2.1.1 Transformácia súčtu nezávislých rovnako rozdelených vek- torov	25
2.1.2 Príklad hladkých transformácií	26
2.1.3 Edgeworthov rozvoj pre hladkú transformáciu	28
2.1.4 Rozvoj hladkej transformácie za pomoci Taylorovho rozvoja	29
2.1.5 Odvodenie charakteristickej funkcie pre $S_{n,2}$	30
2.1.6 Vyjadrenie p_1 Edgeworthovho rozvoja	32
2.1.7 Finálny vzorec pre výpočet p_1 Edgeworthovho rozvoja . . .	35
2.2 Cornish-Fisherov rozvoj	35
2.2.1 Zavedenie rozvoja	35
2.2.2 Odvodenie Cornish-Fisherovho rozvoja z Edgeworthovho rozvoja	36
2.2.3 Odvodenie p_{11} a p_{21}	36
2.2.4 Vzorce pre p_{12} a p_{22} Cornish-Fisherovho rozvoja	38

3	Príklady Edgeworthovho rozvoja	40
3.1	Aproximácia rozdelenia štandardizovaného výberového rozptylu nezávislých náhodných veličín z exponenciálneho rozdelenia	40
3.1.1	Zavedenie odhadu	40
3.1.2	Výpočet a_i a $a_{i,j}$	41
3.1.3	Výpočet μ_{i_1,i_2} a μ_{i_1,i_2,i_3}	44
3.1.4	Výpočet p_1	45
3.1.5	Vyjadrenie Edgeworthovho rozvoja	45
3.1.6	Cornish-Fisherov rozvoj	46
3.1.7	Porovnanie s Monte Carlom	46
3.1.8	Porovnanie kvantilov	49
3.2	Aproximácia rozdelenia štandardizovaného výberového priemeru .	50
3.2.1	Zavedenie pojmu t -štatistika	50
3.2.2	Edgeworthov rozvoj pre štandardizovaný výberový priemer nezávislých rovnako rozdelených veličín	50
3.2.3	Predpoklady pre Edgeworthov rozvoj	51
3.2.4	Výpočet prvého člena Edgeworthovho rozvoja	51
3.2.5	Vyjadrenie p_1 a Edgeworthova aproximácia	52
3.2.6	Aproximácia kvantilov výberového priemeru založená na Cornish-Fisherovej aproximácii	54
	Záver	55
4	Apendix	56
4.1	Momentová vytvárajúca funkcia a jej vlastnosti	56
4.2	Charakteristická funkcia a jej vlastnosti	56
4.3	Definícia $\mathbf{O}_p, \mathbf{o}_p$	57
4.4	Delta veta	57
4.5	Centrálna limitná veta	58
	Seznam použité literatury	59
	Seznam obrázků	60
	Seznam tabulek	61
	Prílohy	62

Úvod

V tejto práci budeme vychádzať z literatúry Hall (1992), ktorá sa zaoberá Edgeworthovým rozvojom, bootstrapom a ich aplikáciami. V tejto práci sa zaoberáme samotným pojmom Edgeworthov rozvoj a jeho odvodením. Cieľom je názorne ukázať odvodenie Edgeworthovho rozvoja, jeho predpoklady a ukázať jeho použitie na príkladoch a porovnanie s aproximáciou pomocou centrálnej limitnej vety.

Prístup bol založený na ukázaní Edgeworthovho rozvoja pre štandardizovaný súčet nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín a ukážkou tohto rozvoja na príklade a následným odvodením všeobecnejšej verzie s ukážkou na dvoch príkladoch. Jeden príklad uvádzame pre odvodenie aproximácie štandardizovaného výberového rozptylu exponenciálneho rozdelenia a druhý na odvodenie aproximácie t -štatistiky za pomoci Edgeworthovho rozvoja.

Táto práca pozostáva zo 4 kapitol:

V prvej kapitole "Úvod do Edgeworthovho rozvoja" ukážeme odvodenie tohto rozvoja na štandardizovanom súčte nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín. Uvedieme jeho prvé 2 členy. Následne demonštrujeme na rozdelení štandardizovaného súčtu nezávislých náhodných veličín z exponenciálneho rozdelenia.

V druhej kapitole "Zovšeobecnenie Edgeworthovho rozvoja" využijeme závery z kapitoly jedna a ukážeme zovšeobecnenie Edgeworthovho rozvoja na rozdelení "hladkej transformácie" nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín. Odvodíme prvý člen všeobecného Edgeworthovho rozvoja.

Následne zavedieme Cornish-Fisherov rozvoj, ktorý na základe Edgeworthovho rozvoja aproximuje kvantily rozdelenia.

V tretej kapitole demonštrujeme všeobecnejšiu verziu Edgeworthovho rozvoja pre rozdelenie štandardizovaného výberového rozptylu náhodných veličín z exponenciálneho rozdelenia a určenie jeho kvantilov.

Následne odvodíme Edgeworthov rozvoj pre t -štatistiku aj s odhadom kvantilov pomocou Cornish-Fisherovho rozvoja.

V štvrtej kapitole "Apendix" sú vymenované niektoré netriviálne tvrdenia, ktoré počas odvodenia používame.

1. Úvod do Edgeworthovho rozvoja

V tejto časti naznačíme odvodenie Edgeworthovho rozvoja na súčte nezávislých rovnako rozdelených veličín.

1.1 Motivačný príklad

Nech máme X_1, \dots, X_n nezávislé rovnako rozdelené náhodné veličiny so strednou hodnotou $\theta_0 = \mu$ a známym rozptylom σ^2 . Potom nech

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

je odhadom hodnoty θ_0 . Pre $\hat{\theta}_n$ platí, že rozptyl $\hat{\theta}_n$ je σ^2/n . Potom z centrálnej limitnej vety plynie, že náhodná veličina

$$S_n = \sqrt{n} \frac{(\hat{\theta}_n - \theta_0)}{\sigma} \quad (1.1)$$

má asymptoticky $N(0,1)$ rozdelenie (Appendix veta 8). Preto pre dostatočne veľké n sa táto aproximácia používa k testovaniu hypotéz a aproximáciám intervalov spoľahlivosti pre parameter θ_0 . Ukážka intervalu spoľahlivosti:

$$I_n = (\hat{\theta}_n - n^{-\frac{1}{2}} \sigma u_{1-\alpha/2}, \hat{\theta}_n + n^{-\frac{1}{2}} \sigma u_{1-\alpha/2}),$$

kde pre u_α je α kvantil normálneho rozdelenia ($P(N < u_\alpha) = \alpha$, kde $N \sim N(0,1)$).

Jedna z otázok je: ako presná je aproximácia (1.1) pomocou normálneho rozdelenia a či by nešlo túto presnosť vylepšiť. Podľa Lachout (2004, str. 88-89), za podmienky $E(|X_1|^3) < +\infty$ môžeme presnosť vyjadriť v tvare:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |P(S_n < x) - \Phi(x)| = O(n^{-1/2}),$$

kde $\Phi(x)$ je distribučná funkcia $N(0,1)$ a pre symbol $O(n^{-1/2})$ platí, že píšeme $\sup_{x \in \mathbb{R}} |P(S_n < x) - \Phi(x)| = O(n^{-1/2})$ práve vtedy, ak existuje $c > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |P(S_n < x) - \Phi(x)| \leq cn^{-1/2} \text{ pre všetky } n \geq n_0.$$

Pre viac informácií o $O(n^{-1/2})$ pozri de Bruijn (1981). Navyše v Lachout (2004, str. 88-89) je ukázané, že člen $O(n^{-1/2})$ závisí na $E(|X_1 - E[X_1]|^3)$. A ak aproximácia je ovplyvnená chybou, tak aj presnosť intervalu spoľahlivosti I_n bude ovplyvnená nejakou chybou.

V tejto diplomovej práci ukážeme aproximáciu rozdelenia náhodnej veličiny S_n pomocou Edgeworthovho rozvoja (najmä jej distribučnej funkcie). Táto aproximácia by mala chybu $O(n^{-1/2})$ zmenšiť.

1.2 Odvodenie Edgeworthovho rozvoja

V tejto kapitole sa budeme venovať odvodeniu Edgeworthovho rozvoja. Edgeworthov rozvoj je v tvare polynómov násobených s deriváciami distribučnej funkcie normálneho rozdelenia.

$$P(S_n \leq x) = \Phi(x) + n^{-1/2} p_1(x)\phi(x) + \dots + n^{-(j/2)} p_j(x)\phi(x) + \dots, \quad (1.2)$$

kde $\Phi(x)$ je distribučná funkcia a $\phi(x)$ je hustota štandardného normálneho rozdelenia, $p_j(x)$ sú polynómy najvyššieho stupňa $j + 2$, ktoré nezávisia na n a S_n je z (1.1). Rozvoj v 1.2 budeme nazývať Edgeworthov rozvoj v tvare nekonečnej rady.

Tento rozvoj nie je aproximáciou vzhľadom na to, že v ňom nefiguruje žiaden chybový člen, ale ide skôr o rozvoj distribučnej funkcie za pomoci distribučnej funkcie normálneho rozdelenia, hustoty normálneho rozdelenia a polynómov.

Pri odvodzovaní tohto rozvoja budeme postupovať tým, že si vyjadríme S_n pomocou charakteristickej funkcie a následne budeme porovnávať túto charakteristickú funkciu s funkciou $\exp(-t^2/2)$, čo je charakteristická funkcia rozdelenia $N(0,1)$ (pre definíciu charakteristickej funkcie pozri Apendix definícia 4).

V tejto kapitole naznačíme odvodenie rozvoja a tvar prvých dvoch polynómov $p_1(x)$ a $p_2(x)$.

1.2.1 Zavedenie kumulantov a ich vzťah s momentami

Na začiatok zavedieme, čo sú to kumulanty. Budú potrebné pri odvodení rozvoja charakteristickej funkcie. Kumulanty sa definujú pomocou momentovej vytvárajúcej funkcie. Pre pripomenutie momentová vytvárajúca funkcia $M_X(t)$ náhodnej veličiny X je v tvare:

$$M_X(t) = \mathbb{E} e^{tX},$$

pre nejaké $t \in \mathbb{R}$ (definícia 2).

Definícia 1 (DasGupta, 2008, str. 194 - 195). *Nech X je náhodná veličina, pre ktorú existuje konečná momentová vytvárajúca funkcia $M_X(t)$, pre t z nejakého okolia nuly. A nech $K_X(t) = \log M_X(t)$ pokiaľ existuje. Potom r -ty kumulant X je definovaný ako*

$$\kappa_r = \frac{d^r}{dt^r} K_X(t)|_{t=0}.$$

Ekvivalentne, kumulanty X sú koeficientami v rozvoji $K_X(t)$ do mocninnej rady

$$K_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n \frac{t^n}{n!}, \quad (1.3)$$

pre t z polomeru konvergenzie $K_X(t)$.

Kumulanty súvisia s momentovou vytvárajúcou funkciou a vďaka vete 3 i s momentami náhodnej veličiny. Ak existuje také t_0 , že $M_X(t) < +\infty$, pre všetky $|t| \leq t_0$ môžeme odvodiť vzťah medzi kumulantom a momentami:

$$\kappa_1 = \frac{d}{dt} K_X(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \log(M_X(t))|_{t=0} = \frac{1}{M_X(0)} \frac{d}{dt} M_X(t)|_{t=0} = \frac{1}{1} \mathbb{E}[X],$$

$M_X(0) = 1$ vzhľadom na to, že $M_X(0) = \mathbb{E}[e^0] = \mathbb{E}[1] = 1$.

Podobne odvodíme vzorce pre $\kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$, ktoré sú potrebné na odvodenie prvých dvoch členov Edgeworthovho rozvoja. Zatiaľ nemôžeme ukázať, že budeme potrebovať len prvé štyri kumulanty, tento fakt vyplynie z odvodzovania členov Edgeworthovho polynómu v ďalších častiach v kapitole 1.

Pre zjednodušenie zápisu zavedieme značenie:

$$M_X^{(j)}(0) = \frac{d^j}{dt^j} M_X(t)|_{t=0}.$$

Odvodenie κ_2 :

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= \frac{d^2}{dt^2} \log(M_X(t))|_{t=0} = -\frac{1}{(M_X(0))^2} (M_X^{(1)}(0))^2 + \frac{1}{M_X(0)} M_X^{(2)}(0) \\ &= -(\mathbb{E}[X])^2 + \mathbb{E}[X^2] = \text{var}(X). \end{aligned}$$

Odvodenie κ_3 :

$$\begin{aligned} \kappa_3 &= \frac{d^3}{dt^3} \log(M_X(t))|_{t=0} \\ &= 2 \frac{1}{(M_X(0))^3} (M_X^{(1)}(0))^3 - 2 \frac{1}{(M_X(0))^2} (M_X^{(1)}(0)) (M_X^{(2)}(0)) \\ &\quad - \frac{1}{(M_X(0))^2} (M_X^{(1)}(0)) (M_X^{(2)}(0)) + \frac{1}{M_X(0)} M_X^{(3)}(0) \\ &= 2 \frac{1}{(M_X(0))^3} (M_X^{(1)}(0))^3 - 3 \frac{1}{(M_X(0))^2} (M_X^{(2)}(0)) (M_X^{(1)}(0)) + \frac{1}{M_X(0)} M_X^{(3)}(0) \\ &= 2 \mathbb{E}[X^3] - 2 \mathbb{E}[X^2] \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[X^3] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^3]. \end{aligned}$$

Odvozenie κ_4 :

$$\begin{aligned}
\kappa_4 &= \frac{d^4}{dt^4} \log(M_X(t))|_{t=0} \\
&= -6 \frac{1}{(M_X(0))^4} (M_X^{(1)}(0))^4 + 6 \frac{1}{(M_X(0))^3} (M_X^{(1)}(0))^2 (M_X^{(2)}(0)) \\
&\quad + 6 \frac{1}{(M_X(0))^3} (M_X^{(2)}(0)) (M_X^{(1)}(0))^2 - 3 \frac{1}{(M_X(0))^2} (M_X^{(3)}(0)) (M_X^{(1)}(0)) \\
&\quad - 3 \frac{1}{(M_X(0))^2} (M_X^{(2)}(0))^2 - \frac{1}{(M_X(0))^2} (M_X^{(1)}(0)) (M_X^{(3)}(0)) \\
&\quad + \frac{1}{M_X(0)} M_X^{(4)}(0) \\
&= -6(E[X])^4 + 6(E[X])^2 E[X^2] + 6E[X^2](E[X])^2 - 3E[X^3]E[X] \\
&\quad - 3(E[X^2])^2 - E[X](E[X^3]) + E[X^4] \\
&= E[X^4] - 3(E[X^2])^2 - 4E[X]E[X^3] + 12E[X^2](E[X])^2 + 6(E[X])^4 \\
&= E[X - E[X]]^4 - 3(\text{var}(X))^2.
\end{aligned}$$

Všetky tieto odvodenia sme mohli urobiť za predpokladu, že existovala pravá strana týchto výrazov (existovali momenty a tiež funkcia $M_X(t)$ bola derivovateľná do príslušného rádu na nejakom okolí bodu $t = 0$).

Z vyššie uvedených odvodení dostávame, že vzorce pre prvé štyri kumulanty sú:

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= E[X] \\
\kappa_2 &= \text{var}(X) \\
\kappa_3 &= E[X - (E[X])]^3 \\
\kappa_4 &= E[X - E[X]]^4 - 3(\text{var}(X))^2.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Poznámka: κ_j je polynóm v momentoch stupňa j . Z týchto vyjadrení môžeme aj momenty vyjadriť ako polynómy koeficientov κ_j , kde polynóm pre $E[X^j]$ je polynóm stupňa j .

Poznámka: Definícia 1 má predpoklad existenciu momentovej vytvárajúcej funkcie, ktorý už nie je zohľadnený vo vzorcoch (1.4). Preto pre platnosť vzorcov (1.4) je nutné predpokladať existenciu funkcie $M_X(t)$ a navyše jej derivovateľnosť na okolí bodu 0 do 4. stupňa. Budeme predpokladať po zvyšok odvodzovania, že tento predpoklad platí.

1.2.2 Vyjadrenie charakteristickej funkcie S_n

Ako sme vysvetlili na začiatku, budeme postupovať tak, že rozpíšeme charakteristickú funkciu S_n . Ako bolo uvedené v motivačnom príklade, S_n je asymptoticky normálne ($N(0,1)$), tak charakteristická funkcia ψ_{S_n} veličiny S_n konverguje

k charakteristickej funkcii normálneho rozdelenia, pre $n \rightarrow +\infty$ (pozri Appendix veta 6).

$$\psi_{S_n}(t) = \mathbb{E}(\exp(itS_n)) \rightarrow \mathbb{E}(\exp(itN)) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right), \text{ pre } t \in \mathbb{R},$$

kde N je náhodná veličina s $N(0,1)$ rozdelením. Pre charakteristickú funkciu $\psi_{S_n}(t)$ platí:

$$\begin{aligned} \psi_{S_n}(t) &= \mathbb{E}(\exp(itS_n)) = \mathbb{E}\left(\exp\left(itn^{\frac{1}{2}} \frac{(\hat{\theta}_n - \theta_0)}{\sigma}\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\exp\left(itn^{\frac{1}{2}} \frac{(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j - \theta_0)}{\sigma}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left(i \frac{t}{n^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=1}^n \frac{(X_j - \theta_0)}{\sigma}\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^n \exp\left(i \frac{t}{n^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{X_j - \theta_0}{\sigma}\right)\right)\right) \\ &\stackrel{\text{nezávislosť } X_j}{=} \prod_{j=1}^n \mathbb{E}\left(\exp\left(i \frac{t}{n^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{X_j - \theta_0}{\sigma}\right)\right)\right) \\ &\stackrel{\text{identita } X_j}{=} \left(\mathbb{E}\left(\exp\left(i \frac{t}{n^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{X_1 - \theta_0}{\sigma}\right)\right)\right)\right)^n = \left(\psi_Y(t/n^{1/2})\right)^n, \end{aligned} \tag{1.5}$$

kde ψ_Y je charakteristická funkcia $Y = (X_1 - \theta_0)/\sigma$. V rovnici (1.5) v poslednom kroku je identita X_j myslená v zmysle, že X_j sú rovnako rozdelené, a teda v rámci výpočtu strednej hodnoty je možné tieto náhodné veličiny zameniť za X_1 . (Pre definíciu strednej hodnoty z komplexnej náhodnej veličiny pozri Appendix definícia 3.)

1.2.3 Taylorov rozvoj logaritmu charakteristickej funkcie S_n

Rozviňme logaritmus charakteristickej funkcie ψ_Y , náhodnej veličiny Y , $Y = (X_1 - \theta_0)/\sigma$, do mocninnej rady pomocou Taylorovho rozvoja $\log(\psi_Y(t))$ v bode $t = 0$.

Na začiatok si označme $\log(\psi_Y(t))$ ako $\zeta_Y(t)$. Ak $\zeta_Y(t)$ ma derivácie všetkých rádov na okolý bodu 0, potom predpokladajme, že existuje Taylorov rozvoj:

$$\zeta_Y(t) = \zeta_Y(0) + \frac{d}{dt}(\zeta_Y(t))\Big|_{t=0} t + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n}(\zeta_Y(t))\Big|_{t=0} t^n + \dots$$

Keďže $\psi_Y(0) = 1$ a $\log(1) = 0$ môžeme vidieť že prvý člen z postupnosti vypadne. Ďalej sa budeme venovať členu $\frac{d^n}{dt^n}(\zeta_Y(t))\Big|_{t=0}$.

$$\frac{d^n}{dt^n}(\zeta_Y(t)) = \frac{d^n}{dt^n}(\log[\mathbb{E}(e^{itY})]) = \frac{d^n}{dt^n}(\log[M_Y(it)]) = \frac{d^n}{dt^n}(K_Y(it)).$$

Nadalej z definície 1 a zo vzťahu $\frac{d^n}{dx^n}f(cx) = c^n \frac{d^n}{dx^n}f(x)$, kde f je dostatočne hladká funkcia a c je konštanta, platí:

$$\frac{d^n}{dt^n}(\zeta_Y(t))\Big|_{t=0} = i^n \frac{d^n}{dt^n}K_Y(it)\Big|_{t=0} = i^n \kappa_n.$$

Potom, nech pre logaritmus charakteristickej funkcie náhodnej veličiny Y , platí:

$$\log(\psi_Y(t)) = \zeta_Y(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \kappa_j (it)^j.$$

Z tohto rozvoja môžeme potom vyjadriť i charakteristickú funkciu $\psi_Y(t)$ pomocou:

$$\psi_Y(t) = \exp(\log(\psi_Y(t))) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \kappa_j (it)^j\right). \quad (1.6)$$

Mohli by sme vyjadriť charakteristickú funkciu S_n priamo ako mocninnú radu, ako je ukázané v apendixe veta 4 a 5. Ale to by sme potom nevedeli porovnať charakteristickú funkciu S_n s charakteristickou funkciou normálneho rozdelenia, ktorá je v exponenciálnom tvare, a preto vyjadrujeme charakteristickú funkciu pomocou exponenciály z logaritmu charakteristickej funkcie S_n , teda pomocou kumulantov.

1.2.4 Vyjadrenie charakteristickej funkcie S_n ako násobok charakteristickej funkcie $N(0,1)$ a polynómu

Vráťme sa k tomu, že $Y = \frac{X_1 - \theta_0}{\sigma}$, kde platí, že θ_0 je parameter, ktorý je rovný strednej hodnote X_1 a σ^2 je rozptyl X_1 . Potom platí, že stredná hodnota Y je rovná 0 a rozptyl je jedna. Z čoho vyplýva $\kappa_1 = 0$ a $\kappa_2 = 1$. Takže keď prepíšeme rovnosť (1.6) dostaneme:

$$\psi_Y(t) = \exp\left(\frac{1}{2} (it)^2 + \dots + \frac{1}{j!} \kappa_j (it)^j + \dots\right).$$

To už môžeme použiť na vyjadrenie ψ_{S_n} charakteristickej funkcie náhodnej veličiny $S_n = n^{-1/2} \sum_{j=1}^n Y_j$ a z jej vlastností (1.5) vyplýva:

$$\begin{aligned} \psi_{S_n}(t) &= \left(\psi_Y(t/n^{1/2})\right)^n \\ &= \exp\left(n\left(\frac{1}{2}(n^{-1/2} it)^2 + \frac{1}{3!}\kappa_3(n^{-1/2} it)^3 + \dots + \frac{1}{j!}\kappa_j(n^{-1/2} it)^j + \dots\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2} (it)^2 + n^{-1/2} \frac{1}{3!}\kappa_3 (it)^3 + \dots + n^{-(j-2)/2} \frac{1}{j!}\kappa_j (it)^j + \dots\right) \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}} \exp\left(n^{-1/2} \frac{1}{3!}\kappa_3 (it)^3 + \dots + n^{-(j-2)/2} \frac{1}{j!}\kappa_j (it)^j + \dots\right), \end{aligned} \quad (1.7)$$

kde $e^{-\frac{t^2}{2}}$ je charakteristická funkcia $N(0,1)$.

Druhý člen s exponenciálou vo vyjadrení funkcie $\psi_{S_n}(t)$ v (1.7) môžeme naďalej rozviesť do mocninnej rady:

$$\begin{aligned}\psi_{S_n}(t) &= e^{-\frac{t^2}{2}} \exp\left(n^{-1/2} \frac{1}{3!} \kappa_3(it)^3 + \dots + n^{-(j-2)/2} \frac{1}{j!} \kappa_j(it)^j + \dots\right) \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + n^{-1/2} r_1(it) + n^{-1} r_2(it) + \dots + n^{-(j/2)} r_j(it) + \dots\right),\end{aligned}\quad (1.8)$$

kde $r_j(x)$ je polynóm s reálnymi koeficientami minimálneho stupňa $j + 2$ a maximálneho stupňa $3j$. Táto vlastnosť, vyplývajúca z porovnávania polynómu a rozvinutej exponenciály, je ukázaná nižšie:

$$\begin{aligned}&\exp\left(n^{-1/2} \frac{1}{3!} \kappa_3(it)^3 + \dots + n^{-(j-2)/2} \frac{1}{j!} \kappa_j(it)^j + \dots\right) \\ &= \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{l!} \left(n^{-1/2} \frac{1}{3!} \kappa_3(it)^3 + \dots + n^{-(j-2)/2} \frac{1}{j!} \kappa_j(it)^j + \dots\right)^l.\end{aligned}\quad (1.9)$$

A to chceme aby sa rovnalo:

$$1 + n^{-1/2} r_1(it) + n^{-1} r_2(it) + \dots + n^{-(j/2)} r_j(it) + \dots$$

Pokiaľ by sme počítali stupeň polynómu pre člen $r_j(it)$ nachádzajúci sa pri $n^{-j/2}$, tak sa nám stačí pozrieť na l -tú mocninu, $1 \leq l \leq j$ v sume z (1.9) (vlastnosť, že nám stačí brať do úvahy $l \leq j$ vyplýva z (1.9), ak by $l > j$, tak najnižší stupeň v takej mocnine bude $n^{-l/2}$, a teda sa tam ani hľadaný člen $n^{-j/2}$ nebude vyskytovať). Takže pre $l \leq j$ zoberme:

$$\frac{1}{l!} \left(n^{-1/2} \frac{1}{3!} \kappa_3(it)^3 + \dots + n^{-j/2} \frac{1}{(j+2)!} \kappa_{j+2}(it)^{j+2} + \dots\right)^l. \quad (1.10)$$

Ak by sme chceli v tejto mocnine nájsť členy pri $n^{-j/2}$, tak si zavedieme také j_1, j_2, \dots, j_l , že $\sum_{m=1}^l (j_m) = j$. Potom všetky členy z (1.10) budú tvaru:

$$\begin{aligned}\frac{1}{l!} \prod_{m=1}^l n^{-j_m/2} \frac{1}{(j_m+2)!} \kappa_{j_m+2}(it)^{j_m+2} &= n^{\sum_{m=1}^l (-j_m/2)} C(it)^{\sum_{m=1}^l (j_m+2)} \\ &= n^{-j/2} C(it)^{j+2l},\end{aligned}$$

kde C je konštanta. Pretože členy pri $n^{-j/2}$ sa nachádzajú len pre $1 \leq l \leq j$, tak potom pre následné polynómy $r_j(x)$ sú stupňa minimálne $j + 2$ a maximálne $3j$. Naďalej polynóm $r_j(x)$ závisí na $\kappa_3, \dots, \kappa_{j+2}$, ale už nie na n . Z rozvoja (1.8) môžeme vidieť, ako sa líši charakteristická funkcia rozdelenia S_n od charakteristickej funkcie normálneho rozdelenia.

Pokiaľ sa bližšie pozrieme na polynómy r_j , tak môžeme vidieť, že polynómy r_j sú stupňa $j + 2l$, kde $l \in \{1, \dots, j\}$, a teda tieto polynómy sú párneho stupňa keď j je párne a nepárneho stupňa, keď j je nepárne. Ukážka výpočtu prvých dvoch členov je v časti nižšie.

1.2.5 Odvodenie prvých dvoch členov rozvoja charakteristickej funkcie S_n ako násobok charakteristickej funkcie $N(0,1)$ a polynómu

Označme si výraz:

$$\varphi(it) = \exp \left(n^{-1/2} \frac{1}{3!} \kappa_3 (it)^3 + \dots + n^{-(j-2)/2} \frac{1}{j!} \kappa_j (it)^j + \dots \right), \quad (1.11)$$

nech $z = it$ a urobme Taylorov rozvoj toho výrazu pre $z = 0$.

$$\begin{aligned} & \varphi(0) + \varphi^{(1)}(0) z + \frac{1}{2} \varphi^{(2)}(0) z^2 + \frac{1}{6} \varphi^{(3)}(0) z^3 \\ & + \frac{1}{24} \varphi^{(4)}(0) z^4 + \frac{1}{120} \varphi^{(5)}(0) z^5 + \frac{1}{720} \varphi^{(6)}(0) z^6 + \dots \end{aligned} \quad (1.12)$$

Teraz vieme, že $z = it$, a pokiaľ $z = 0$, tak $t = 0$. Takže môžeme vidieť z (1.12) a (1.11), že členy $\varphi^{(j)}(0)$ budú obsahovať funkciu $\varphi(0)$ a nejaké derivácie člena $W(z)$ v bode $z = 0$, kde

$$W(z) = n^{-1/2} \frac{1}{3!} \kappa_3 z^3 + \dots + n^{-(j-2)/2} \frac{1}{j!} \kappa_j z^j + \dots$$

Funkcia $W(z)$ je polynóm, ktorého derivácie sú ľahko vyjadriteľné v tvare:

$$W^{(l)}(z) = \left(n^{-(l-2)/2} \kappa_l + \dots + n^{-(j-2)/2} \frac{1}{(j-l)!} \kappa_j z^{j-l} + \dots \right),$$

pre $l > 2$. Pre $l = 1$ a $l = 2$ bude vyjadrenie v nasledujúcich výpočtoch.

Derivácie člena $n^{-1/2} \frac{1}{3!} \kappa_3 z^3 + \dots + n^{-(j-2)/2} \frac{1}{j!} \kappa_j (z)^j + \dots$ v bode $z = 0$:

$$\begin{aligned} W(z)|_{z=0} &= 0, \\ W^{(1)}(z)|_{z=0} &= 0, \\ W^{(2)}(z)|_{z=0} &= 0, \\ W^{(l)}(z)|_{z=0} &= n^{-(l-2)/2} \kappa_l. \end{aligned}$$

Momentálne, keď vieme aké hodnoty nadobúdajú polynómy $W(z)$ a jeho derivácie, budeme ešte potrebovať hodnotu samotnej funkcie $\varphi(z)$ v bode $z = 0$. Keďže

$\varphi(z) = \exp(W(z))$, tak $\varphi(z)|_{z=0} = \exp(0) = 1$. Keď teraz poznáme všetky hodnoty funkcie a jej derivácií, môžeme vypočítať jednotlivé derivácie $\varphi(z)$ pre $z = 0$. Prvá derivácia a dosadenie:

$$\varphi^{(1)}(z)|_{z=0} = \left(\varphi(z) \left(W^{(1)}(z) \right) \right) \Big|_{z=0} = 1 * 0 = 0.$$

Druhá derivácia a dosadenie:

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(z)|_{z=0} &= \left(\varphi^{(1)}(z) \left(W^{(1)}(z) \right) + \varphi(z) \left(W^{(2)}(z) \right) \right) \Big|_{z=0} \\ &= 0 * 0 + 1 * 0 = 0. \end{aligned}$$

Tretia derivácia a dosadenie:

$$\begin{aligned} \varphi^{(3)}(z)|_{z=0} &= \left(\varphi^{(2)}(z) \left(W^{(1)}(z) \right) + 2\varphi^{(1)}(z) \left(W^{(2)}(z) \right) + \varphi(z) \left(W^{(3)}(z) \right) \right) \Big|_{z=0} \\ &= 0 * 0 + 2 * 0 * 0 + 1 * n^{-1/2} \kappa_3 = n^{-1/2} \kappa_3. \end{aligned}$$

Štvrtá derivácia a dosadenie:

$$\begin{aligned} \varphi^{(4)}(z)|_{z=0} &= \left(\varphi^{(3)}(z) \left(W^{(1)}(z) \right) + 3\varphi^{(2)}(z) \left(W^{(2)}(z) \right) + 3\varphi^{(1)}(z) \left(W^{(3)}(z) \right) \right. \\ &\quad \left. + \varphi(z) \left(W^{(4)}(z) \right) \right) \Big|_{z=0} \\ &= n^{-1/2} \kappa_3 * 0 + 3 * 0 * 0 + 3 * 0 * n^{-1/2} \kappa_3 + 1 * n^{-1} \kappa_4 \\ &= n^{-1} \kappa_4. \end{aligned}$$

Piata derivácia a dosadenie:

$$\begin{aligned} \varphi^{(5)}(z)|_{z=0} &= \left(\varphi^{(4)}(z) \left(W^{(1)}(z) \right) + 4\varphi^{(3)}(z) \left(W^{(2)}(z) \right) + 6\varphi^{(2)}(z) \left(W^{(3)}(z) \right) \right. \\ &\quad \left. + 4\varphi^{(1)}(z) \left(W^{(4)}(z) \right) + \varphi(z) \left(W^{(5)}(z) \right) \right) \Big|_{z=0} = n^{-1} \kappa_4 * 0 \\ &\quad + 4 * n^{-1/2} \kappa_3 * 0 + 6 * 0 * n^{-1/2} \kappa_3 + 4 * 0 * n^{-1} \kappa_4 + 1 * n^{-3/2} \kappa_5 \\ &= n^{-3/2} \kappa_5. \end{aligned}$$

Šiesta derivácia a dosadenie:

$$\begin{aligned} \varphi^{(6)}(z)|_{z=0} &= \left(\varphi^{(5)}(z) \left(W^{(1)}(z) \right) + 5\varphi^{(4)}(z) \left(W^{(2)}(z) \right) + 10\varphi^{(3)}(z) \left(W^{(3)}(z) \right) \right. \\ &\quad \left. + 10\varphi^{(2)}(z) \left(W^{(4)}(z) \right) + 5\varphi^{(1)}(z) \left(W^{(5)}(z) \right) + \varphi(z) \left(W^{(6)}(z) \right) \right) \Big|_{z=0} \\ &= n^{-3/2} \kappa_5 * 0 + 5 * n^{-1} \kappa_4 * 0 + 10 * n^{-1/2} \kappa_3 * n^{-1/2} \kappa_3 \\ &\quad + 10 * 0 * n^{-1} \kappa_4 + 5 * 0 * n^{-3/2} \kappa_5 + 1 * n^{-2} \kappa_6 \\ &= n^{-2} \kappa_6 + 10n^{-1} \kappa_3^2. \end{aligned}$$

Pre odvodenie prvých 2 členov nám budú stačiť hodnoty $\varphi^{(j)}(z)|_{z=0}$ pre $j \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Dôvod je ten, že hľadáme členy pri $n^{-1/2}$ a n^{-1} .

Pre $n^{-1/2}$ je to pomerne jednoduché, keďže všetky $\varphi^{(j)}(z)|_{z=0}$ budú aspoň stupňa $n^{-1/2}$, a jediné $\varphi(z)|_{z=0} = 1$. Najnižší stupeň, ktorý dosahuje $W^{(j)}(z)|_{z=0}$, je práve $n^{-1/2}$, a teda jediný člen, ktorý bude stupňa $n^{-1/2}$, bude ten, ktorý obsahuje výraz $\varphi(z)(W^{(3)}(z))$, čo je práve vo vyjadrení pre $\varphi^{(3)}(z)|_{z=0}$.

Pre n^{-1} je odôvodnenie podobné, buď člen n^{-1} bude pri $\varphi(z)(W^{(4)}(z))$ ako člen stupňa n^{-1} násobený 1, alebo pri $\varphi^{(3)}(z)W^{(3)}(z)$, kde oba členy sú stupňa $n^{-1/2}$. Tieto členy sa nachádzajú vo vyjadrení pre $\varphi^{(4)}(z)|_{z=0}$ a $\varphi^{(6)}(z)|_{z=0}$.

Pre vyjadrenie r_1 sa pozrieme na členy z (1.12) obsahujúce $n^{-1/2}$:

$$r_1(z) = \frac{1}{6}\kappa_3 z^3,$$

Pre vyjadrenie r_2 sa pozrieme na členy z (1.12) obsahujúce n^{-1} :

$$r_2(z) = \frac{1}{24}\kappa_4 z^4 + \frac{1}{72}\kappa_3^2 z^6.$$

Tým sme ukázali odvodenie $r_1(z)$ a $r_2(z)$ (a postup ako odvodiť ďalšie členy) v prepise charakteristickej funkcie ψ_{S_n} z 1.8:

$$\psi_{S_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} + n^{-1/2} r_1(it) e^{-\frac{t^2}{2}} + n^{-1} r_2(it) e^{-\frac{t^2}{2}} + \dots + n^{-(j/2)} r_j(it) e^{-\frac{t^2}{2}} + \dots,$$

1.2.6 Prechod z vyjadrenia S_n za pomoci charakteristickej funkcie ku vyjadreniu S_n za pomoci distribučnej funkcie

Keďže vieme, že:

$$e^{-t^2/2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi(x), \quad (1.13)$$

kde $\Phi(x)$ je distribučná funkcia $N(0,1)$ rozdelenia, potom nech existuje taká funkcia $R_j(x)$, pre ktorú platí:

$$n \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dR_j(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} R_j'(x) dx = r_j(it) e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (1.14)$$

kde $\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dR_j(x)$ je myslený ako Lebesgue-Stieltjesov integrál, ktorý existuje, ak e^{itx} je obmedzená (čo platí keďže $|e^{itx}| \leq 1$) a $R_j(x)$ má obmedzenú variáciu. Vlastnosť, že $R_j(x)$ má obmedzenú variáciu v tomto prípade musíme predpokladať a táto vlastnosť bude ukázaná v 1.22. Pre definíciu a informácie o Lebesgue-Stieltjesov integrále voči znamienkovým mieram pozri Shilov a kol. (1966).

Ďalej nech existuje náhodná veličina Z s distribučnou funkciou v tvare:

$$F_Z(x) = P(Z \leq x) = \Phi(x) + n^{-1/2} R_1(x) + n^{-1} R_2(x) + \dots + n^{-(j/2)} R_j(x) + \dots \quad (1.15)$$

naďalej predpokladajme pre $\psi_Z(t) = E[\exp(itZ)]$, že platí:

$$E[\exp(itZ)] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) d(F_Z(x))$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) d(\Phi(x) + n^{-1/2} R_1(x) + n^{-1} R_2(x) + \dots + n^{-(j/2)} R_j(x) + \dots) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) d(\Phi(x)) + n^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) d(R_1(x)) + \dots \\
&\quad + n^{-(j/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) d(R_j(x)) + \dots
\end{aligned}$$

Pokiaľ také vyjadrenie existuje, tak potom vyplýva z (1.14) a (1.13), že:

$$\psi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} + n^{-1/2} r_1(it) e^{-\frac{t^2}{2}} + n^{-1} r_2(it) e^{-\frac{t^2}{2}} + \dots + n^{-(j/2)} r_j(it) e^{-\frac{t^2}{2}} + \dots,$$

čo je presne charakteristická funkcia S_n , a teda:

$$P(S_n \leq x) = \Phi(x) + n^{-1/2} R_1(x) + n^{-1} R_2(x) + \dots + n^{-(j/2)} R_j(x) + \dots \quad (1.16)$$

V tejto časti sme zaviedli funkciu $R_j(x)$ a náhodnú veličinu Z . Ďalej sme predpokladali, že veličina Z existuje s vlastnosťami (1.15), či taká veličina existuje diskutujeme v nasledujúcom odstavci.

Existencia veličiny Z : Ukázať existenciu náhodnej veličiny Z z (1.15), je náročné a tento problém rieši článok Cramér (1928, str. 64-66), ktorý uvažuje, že rozvoj v tvare nekonečného súčtu existuje práve za podmienky $E[\exp(\frac{1}{4}Y^2)] < +\infty$, kde $Y = \frac{X_1 - \theta_0}{\sigma}$. Táto podmienka je dosť silná, pretože neplatí už pre súčet veličín z exponenciálneho rozdelenia.

V ďalšej časti ukážeme, ako vyjadriť R_j za pomoci hustoty $N(0,1)$.

1.2.7 Prepis členov polynómu za pomoci hustoty $N(0,1)$ a jej derivácií

Na začiatok odvodíme tvar Lebesgue-Stieltjesových integrálov $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) d\Phi^{(j)}(x)$ (vyvetlenie, že môžeme integrovať podľa $\Phi^{(j)}(x)$, repektive, že táto funkcia je obmedzenej variácie je vysvetlené v (1.22)), ktoré budú potrebné pre odvodenie $R_j(x)$. Tvar integrálov budeme odvádzať za pomoci matematickej indukcie, kde ukážeme najprv tvar $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) d\Phi^{(1)}(x)$ a potom odvodíme tvar $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) d\Phi^{(j+1)}(x)$ za pomoci $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) d\Phi^{(j)}(x)$.

Pokiaľ by sme integrovali v (1.13) per-partes, nech

$$\begin{aligned}
v &= 1/\sqrt{2\pi} \exp(-x^2/2), & u' &= \exp(itx), \\
v' &= -x/\sqrt{2\pi} \exp(-x^2/2), & u &= (it)^{-1} \exp(itx).
\end{aligned}$$

Potom

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi(x) = \left[\frac{1}{it\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) \exp(itx) \right]_{x=-\infty}^{\infty}$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-x}{it\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) \exp(itx) dx.$$

Vieme, že $\frac{1}{it\sqrt{2\pi}}$ je konštanta a $\exp(itx)$ je obmedzené, navyše platí, že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-x^2/2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(-x^2/2) = 0,$$

a teda prvý člen vypadne. A naďalej môžeme upraviť druhý člen:

$$\begin{aligned} & - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-x}{it\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) \exp(itx) dx \\ &= (-it)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx \\ &= (-it)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) d(\Phi^{(1)}(x)). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Ukázali sme, že $e^{-t^2/2}$ vieme prepísať ako $(-it)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi^{(1)}(x)$, ďalej ukážeme že $\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi^{(j)}(x)$ sa dá rozpísať ako $(-it)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi^{(j+1)}(x)$.

Integrujeme integrál $\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi^{(j)}(x)$ per partes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi^{(j)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \Phi^{(j+1)}(x) dx$$

per partes:

$$\begin{aligned} v &= \Phi^{(j+1)}(x), & u' &= \exp(itx), \\ v' &= \Phi^{(j+2)}(x), & u &= (it)^{-1} \exp(itx). \end{aligned}$$

Teraz integrál môžeme rozpísať ako:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \Phi^{(j+1)}(x) dx \\ &= \left[\Phi^{(j+1)}(x) (it)^{-1} \exp(itx) \right]_{x=-\infty}^{\infty} \\ & \quad - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^{(j+2)}(x) (it)^{-1} \exp(itx) dx. \end{aligned}$$

Prvý člen tohto integrálu bude rovný 0 z dôvodu, že derivácie hustoty normálneho rozdelenia sú v tvare polynómu krát $e^{-x^2/2}$, ktorý spôsobí, že prvý člen bude rovný 0 v plus a mínus nekonečne. A teda dostávame nasledujúci vzťah:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \Phi^{(j+2)}(x) dx = \\ & \quad - (it)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^{(j+2)}(x) \exp(itx) dx. \\ &= (-it)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) d\Phi^{(j+1)}(x). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Tým pádom z (1.17) a (1.18) môžeme písať:

$$\begin{aligned}
e^{-t^2/2} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi(x) \\
&= (-it)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi^{(1)}(x) \\
&= (-it)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi^{(2)}(x) \\
&\vdots \\
&= (-it)^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi^{(j)}(x),
\end{aligned}$$

kde $\Phi^{(j)}(x) = \frac{d^j \Phi}{dx^j}$. Takže to znamená, že:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\{(-D)^j \Phi(x)\} = (it)^j e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (1.19)$$

kde D je diferenciálny operátor $\frac{d}{dx}$. Potom môžeme interpretovať $r_j(-D)$ ako polynóm diferenciálnych operátorov, takže $r_j(-D)$ je diferenciálny operátor sám osebe a z rovnice (1.19) plynie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\{r_j(-D)\Phi(x)\} = r_j(it) e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Takže pre funkciu $R_j(x)$, ktorú hľadáme, platí

$$R_j(x) = r_j(-D)\Phi(x), \quad (1.20)$$

pre $j \geq 1$.

Ďalej vieme, že $r_j(u)$ je polynóm v u . A teda ak by sme sa pozreli na $r_j(-D)$, tak vieme, že sa dá (1.20) rozviesť do tvaru:

$$r_j(-D)\Phi(x) = c_0\Phi(x) + c_1(-D)\Phi(x) + \dots + c_{3j}(-D)^{3j}\Phi(x).$$

Ako bolo ukázané v predchádzajúcej časti, r_j obsahuje členy minimálneho stupňa $j+2$ a maximálneho stupňa $3j$. A teda pri prepise $r_j(-D)\Phi(x)$ vždy bude obsahovať členy s minimálnym stupňom derivácie $\Phi(x)$ aspoň 3.

To znamená:

$$r_j(-D)\Phi(x) = c_{j+2}(-D)^{j+2}\Phi(x) + \dots + c_{3j}(-D)^{3j}\Phi(x).$$

Teraz sa pozrieme na členy $D^j\Phi(x)$ od stupňa 1 do stupňa 6.

$$\begin{aligned}
D^1(\Phi(x)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) = \phi(x), \\
D^2(\Phi(x)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)(-x) = \phi(x)(-x), \\
D^3(\Phi(x)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)(x^2 - 1) = \phi(x)(x^2 - 1), \\
D^4(\Phi(x)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)(x^3 - x) = \phi(x)(-x^3 + 3x), \\
D^5(\Phi(x)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)(x^4 - 6x^2 + 3) = \phi(x)(x^4 - 6x^2 + 3), \\
D^6(\Phi(x)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)(x^5 - 10x^3 + 15x) = \phi(x)(-x^5 + 10x^3 - 15x).
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Ako môžeme vidieť, tak všetky $D^j(\Phi(x))$ sú v tvare polynóm krát hustota $N(0,1)$ rozdelenia. A keďže $r_j(-D)\Phi(x)$ je len súčet násobkov výrazov obsahujúcich polynóm v x a $\phi(x)$, tak potom môžeme $\phi(x)$ vytiahnuť pred tento výraz a zvyšný polynóm označíme ako p_j .

$$R_j(x) = p_j(x)\phi(x). \tag{1.22}$$

Z tohto vyjadrenia je vidieť, že $R_j(x)$ (a z (1.21) $\Phi^{(j)}(x)$) je spojitá diferencovateľná funkcia násobená polynómom, ktorý je vždy spojitá diferencovateľná, a teda je tiež spojitá diferencovateľná. Navyše vďaka tomu, že $\phi(x)$ má limity v $\pm\infty$ rovné 0 a je v tvare exponenciely ($\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$), tak aj táto funkcia násobená polynómom bude mať limity v $\pm\infty$ rovné 0. Tým pádom je obmedzená s obmedzenou deriváciou. Každá funkcia, ktorá je spojitá diferencovateľná a obmedzená je obmedzenej variácie (pozri Kannan a Krueger (1996) kapitola 6). Ďalej si ukážeme, ako vypočítať p_1 a p_2 .

Vyjadrenie p_1 :

$$\begin{aligned}
p_1(x)\phi(x) &= R_1(x) = r_1(-D)\Phi(x) = \frac{1}{6}\kappa_3(-D)^3\Phi(x) \\
&= -\frac{1}{6}\kappa_3\phi(x)(x^2 - 1) = -\frac{1}{6}\kappa_3(x^2 - 1)\phi(x).
\end{aligned}$$

A teda:

$$p_1(x) = -\frac{1}{6}\kappa_3(x^2 - 1). \tag{1.23}$$

Ukážka pre p_2 :

$$\begin{aligned}
p_2(x)\phi(x) &= R_2(x) = r_2(-D)\Phi(x) = \left(\frac{1}{24}\kappa_4(-D)^4 + \frac{1}{72}\kappa_3^2(-D)^6\right)\Phi(x) \\
&= \frac{1}{24}\kappa_4(-D)^4\Phi(x) + \frac{1}{72}\kappa_3^2(-D)^6\Phi(x) = \frac{1}{24}\kappa_4\phi(x)(-x^3 + 3x) \\
&\quad + \frac{1}{72}\kappa_3^2\phi(x)(-x^5 + 10x^3 - 15x).
\end{aligned}$$

A teda:

$$p_2(x) = \frac{1}{24}\kappa_4(-x^3 + 3x) + \frac{1}{72}\kappa_3^2(-x^5 + 10x^3 - 15x). \quad (1.24)$$

Poznámka: Polynómy, pri $\phi(x)$ v $(-1)D^j\Phi(x)$, sa tiež nazývajú Hermitovské polynómy.

1.2.8 Finálne vyjadrenie distribúcie pôvodného rozdelenia

Po dosadení (1.22) do (1.16) dostávame vyjadrenie v tvare:

$$P(S_n \leq x) = \Phi(x) + n^{-1/2} p_1(x)\phi(x) + \dots + n^{-(j/2)} p_j(x)\phi(x) + \dots \quad (1.25)$$

Formulácia v tvare (1.25) je Edgeworthov rozvoj v tvare nekonečnej rady distribučnej funkcie pre náhodnú veličinu S_n .

1.2.9 Diskusia a možné riešenie problému konvergenzie

Ako už bolo diskutované na konci časti, 1.2.6. Prechod z vyjadrenia S_n za pomoci charakteristickej funkcie ku vyjadreniu S_n za pomoci distribučnej funkcie, podmienky existencie vyplývajú hlavne z existencie sčítateľnej rady s funkciami R_j a ako bolo povedané nezostáva nám nič iné, než sa odkázať v tejto časti na Cramér (1928, str. 64-66), kde je táto podmienka zavedená ako: $E\{\exp(\frac{1}{4}Y^2)\} < \infty$, kde $Y = \frac{X_1 - \theta_0}{\sigma}$. A ako už bolo povedané, táto podmienka je dosť obmedzujúca.

Možným riešením, ako tento problém obísť, je zaviesť Edgeworthov rozvoj, ako aproximáciu po člen j a nájsť, či podmienky tejto aproximácie sú jemnejšie. Ukážka Edgeworthovho rozvoja v tvare aproximácie:

$$P(S_n \leq x) = \Phi(x) + n^{-1/2} p_1(x)\phi(x) + \dots + n^{-(j/2)} p_j(x)\phi(x) + o(n^{-j/2}), \quad (1.26)$$

Budeme predpokladať, že takýto rozvoj splňuje rovnomernú konvergenciu v x pre pevné j pri $n \rightarrow +\infty$. Rozvoj (1.26) sa niekedy v literatúre nazýva rozvoj v tvare asymptotickej rady, my ho tak budeme nazývať tiež.

Ukážka pre rozdelenie o jednom člene Edgeworthovho rozvoja:

$$P(S_n \leq x) = \Phi(x) - n^{-1/2} \frac{1}{6}\kappa_3(x^2 - 1)\phi(x) + o(n^{-1/2}).$$

Pre rozdelenie o dvoch členoch Edgeworthovho rozvoja:

$$\begin{aligned} P(S_n \leq x) &= \Phi(x) - n^{-1/2} \frac{1}{6}\kappa_3(x^2 - 1)\phi(x) \\ &+ n^{-1} \left(\frac{1}{24}\kappa_4(-x^3 + 3x) + \frac{1}{72}\kappa_3^2(-x^5 + 10x^3 - 15x) \right) \phi^{(1)}(x) + o(n^{-1}). \end{aligned}$$

Postačujúce podmienky pre (1.26), so zvyškom uvedeného stupňa, sú uvedené v Hall (1992, str. 45) ako:

$$E(|X_i|^{j+2}) < \infty \quad \text{a} \quad \limsup_{|t| \rightarrow \infty} |\psi_{X_i}(t)| < 1.$$

Druhá podmienka (nazývaná tiež Cramérova podmienka) je splnená pre spojité rozdelenia. Existujú vyjadrenia Edgeworthovho rozvoja pre diskkrétne rozdelenia (teda tie, ktoré porušujú 2. podmienku), ale už nie v tvare (1.26). Pre informácie o Edgeworthovom rozdelení pre diskkrétne rozdelenia pozri Hall (1992, str. 46).

1.3 Príklad na exponenciálnom rozdelení

Ukážeme postup z predchádzajúcej sekcie pre odvodenie asymptotického rozdelenia normovaného súčtu n exponenciálnych rozdelení. Potom porovnáme aproximáciu založenú na centrálnej limitnej vete, Edgeworthovom rozvoji s jedným členom, Edgeworthovom rozvoji s dvoma členmi a lineárnou transformáciou gama rozdelenia, ktoré je presné rozdelenie pre konečný súčet nezávislých rovnako rozdelených veličín z exponenciálneho rozdelenia. Pre začiatok majme X_1, \dots, X_n nezávislé náhodné veličiny z exponenciálneho rozdelenia so strednou hodnotou $\mu = 1$. A bude nás zaujímať:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - 1}{1} \right).$$

1.3.1 Normálna aproximácia

Podľa centrálnej limitnej vety platí, že:

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D} N(0,1),$$

kde $\bar{X}_n = 1/n \sum_{i=1}^n X_i$ a σ je smerodajnou odchýlkou X_1 . V našom prípade $\mu = 1$, tým pádom $\sigma^2 = 1$.

Takže normovaný súčet je v tvare:

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - 1}{1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - 1}{1} \right).$$

A ten má byť približne $N(0,1)$, pokiaľ by bolo n dostatočne veľké. Túto aproximáciu v tejto práci použijeme i pre situáciu kde n nebude dostatočne veľké (3,5), použijeme toto rozdelenie ako referenciu, pretože chceme ukázať, či a o koľko bude Edgeworthov rozvoj presnejší.

Takže S_n môžeme aproximovať na základe centrálnej limitnej vety rozdelením $N(0,1)$.

1.3.2 Edgeworthov rozvoj s jedným a dvoma členmi

Pre Edgeworthov rozvoj si zavedieme $Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$, pre $i \in \{1, 2, 3\}$. Kde σ je smerodajná odchýlka X_1 . Čo znamená, že $Y_i = X_i - 1$.

Poznámka: Náhodné veličiny Y_i nepochádzajú z exponenciálneho rozdelenia, ale z posunutého exponenciálneho rozdelenia. A pretože X_i boli nezávislé a rovnako rozdelené, tak Y_i sú tiež.

Pre výpočet členov Edgeworthovho rozvoja potrebujeme kumulanty. Pre prvé dva členy Edgeworthovho rozvoja nám budú stačiť kumulanty 3. a 4. stupňa. V (1.4) sme odvodili vzorce pre prvé 4 členy.

$$\begin{aligned}\kappa_3 &= \mathbb{E}[Y_1 - (\mathbb{E}[Y_1])]^3 = \mathbb{E}[Y_1]^3 = \mathbb{E}[X_1 - 1]^3 \\ &= \mathbb{E}[X_1]^3 - 3\mathbb{E}[X_1]^2 + 3\mathbb{E}[X_1] - 1 = 6 - 6 + 3 - 1 = 2 \\ \kappa_4 &= \mathbb{E}[Y - \mathbb{E}[Y]]^4 - 3(\text{var}(Y))^2 = \mathbb{E}[Y_1]^4 - 3 \\ &= \mathbb{E}[X_1]^4 - 4\mathbb{E}[X_1]^3 + 6\mathbb{E}[X_1]^2 - 4\mathbb{E}[X_1] + 1 - 3 \\ &= 24 - 24 + 12 - 4 + 1 - 3 = 6.\end{aligned}$$

Potom môžeme priamo z (1.23) a (1.24) vyjadriť $p_1(x)$ a $p_2(x)$:

$$\begin{aligned}p_1(x) &= -\frac{1}{3}(x^2 - 1) \\ p_2(x) &= \frac{1}{4}(-x^3 + 3x) + \frac{1}{18}(-x^5 + 10x^3 - 15x).\end{aligned}$$

A tým pádom finálne vyjadrenie pre aproximáciu rozdelenia S_n založenej na Edgeworthovom rozvoji s jedným členom je:

$$P(S_3 \leq x) \text{ aproximujeme výrazom } \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{n}}p_1(x)\phi(x). \quad (1.27)$$

A pre 2 členy Edgeworthovho rozvoju:

$$P(S_3 \leq x) \text{ aproximujeme výrazom } \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{n}}p_1(x)\phi(x) + \frac{1}{n}p_2(x)\phi(x). \quad (1.28)$$

1.3.3 Presné rozdelenie

Vieme, že ak X_1, \dots, X_n sú nezávislé z exponenciálneho rozdelenia so strednou hodnotou $\mu = 1$, potom $\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n, 1)$. To znamená, že náš súčet:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (X_i - 1) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n X_i - n \right),$$

$$\sqrt{n}S_n + n = \sum_{i=1}^n X_i,$$

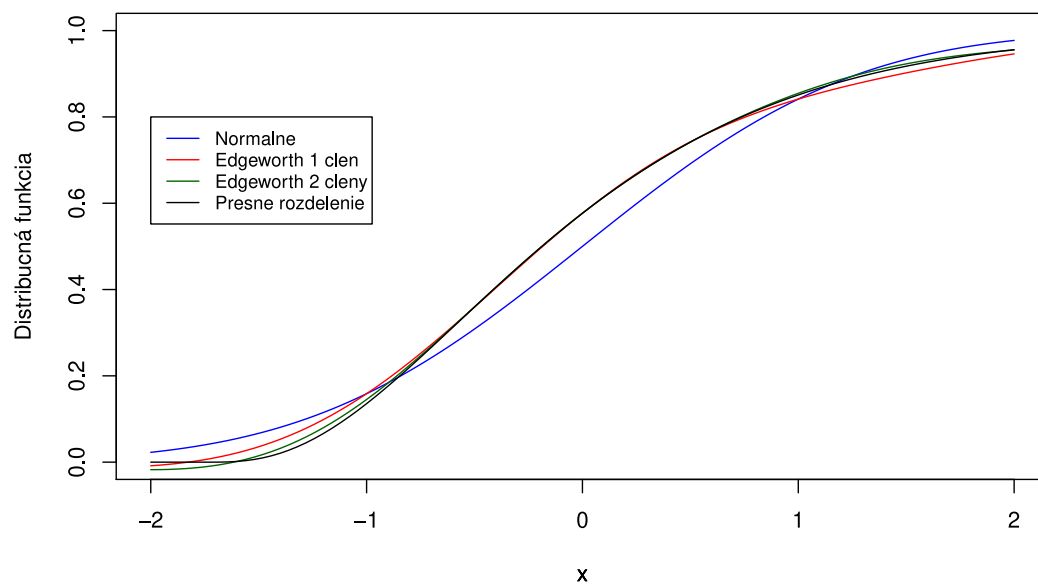
$$P(\sqrt{n}S_n + n \leq x) = G_n(x),$$

kde $G_n(x)$ je distribučná funkcia $\Gamma(n, 1)$. Potom platí:

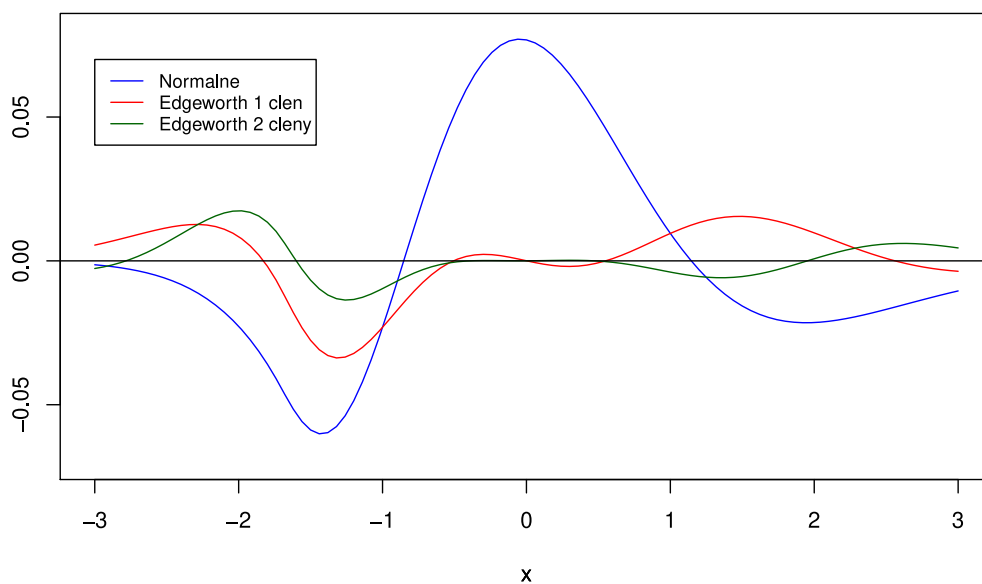
$$P(S_n \leq x) = G_n(\sqrt{n}x + n).$$

1.3.4 Grafické porovnanie

Na nasledujúcom obrázku môžeme vidieť jednotlivé aproximácie:



Obrázek 1.1: Porovnanie jednotlivých aproximácií so skutočným rozdelením pre $n = 3$.



Obrázek 1.2: Porovnanie rozdielu skutočného rozdelenia a jednotlivých aproximácií pre $n = 3$.

Z Obrázku 1.1 môžeme pozorovať, že obe aproximácie, ktoré mali v sebe členy

Edgeworthovho rozvoju sú "bližšie" než aproximácia normálnym rozdelením. Pre lepšie porovnanie sa pozrieme na grafy rozdielu skutočného rozdelenia S_n a pozorovaného rozdelenia:

Z Obrázku 1.2 je vidieť, že pre niektoré hodnoty x je normálne rozdelenie lepšia aproximácia skutočného rozdelenia, než Edgeworthov rozvoj, ale ak by sme skúmali:

$$K_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - F_n(x)|,$$

kde $F(x)$ je skutočná distribučná funkcia rozdelenia S_n a F_n sú jednotlivé aproximácie. Tak by sme došli k záveru, že Edgeworthova aproximácia s jedným a aj Edgeworthova aproximácia s dvoma členmi má túto veličinu K_n menšiu, než normálne rozdelenie. Približné hodnoty tejto veličiny sú zhodnotené v tabuľke 1.1.

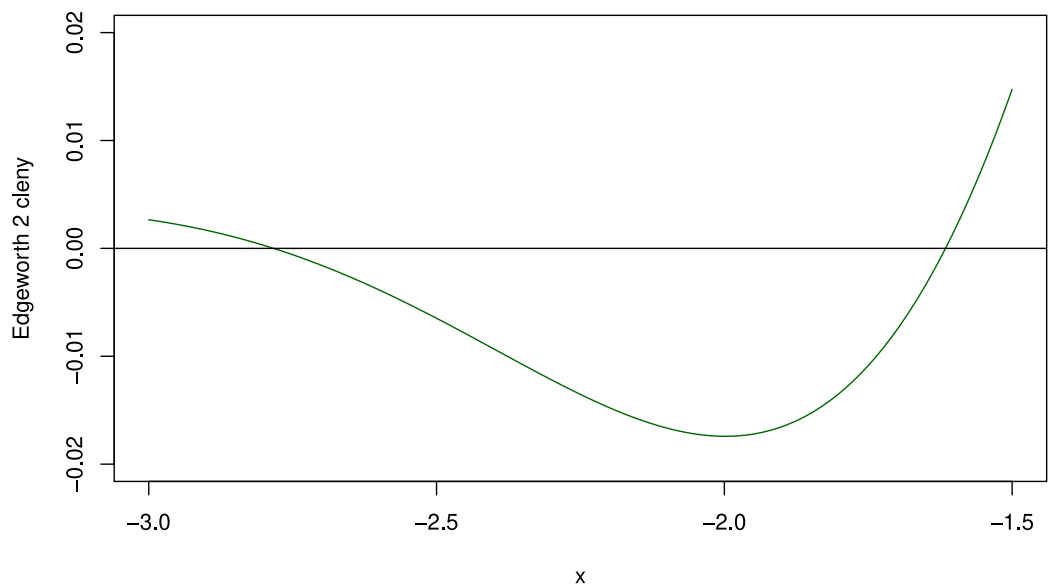
Aproximácia / hodnota K_n	$n = 3$	$n = 5$	$n = 10$	$n = 30$
Normálna aproximácia	0.077	0.059	0.042	0.024
Edgeworthov rozvoj s 1 členom	0.034	0.017	0.003	0.001
Edgeworthov rozvoj s 2 členmi	0.006	0.007	0.002	$4 * 10^{-4}$

Tabuľka 1.1: Porovnanie hodnôt veličiny K_n u jednotlivých aproximácií.

Z tejto tabuľky môžeme vidieť, že hodnota veličiny K_n klesá s väčším počtom členov Edgeworthovej aproximácie.

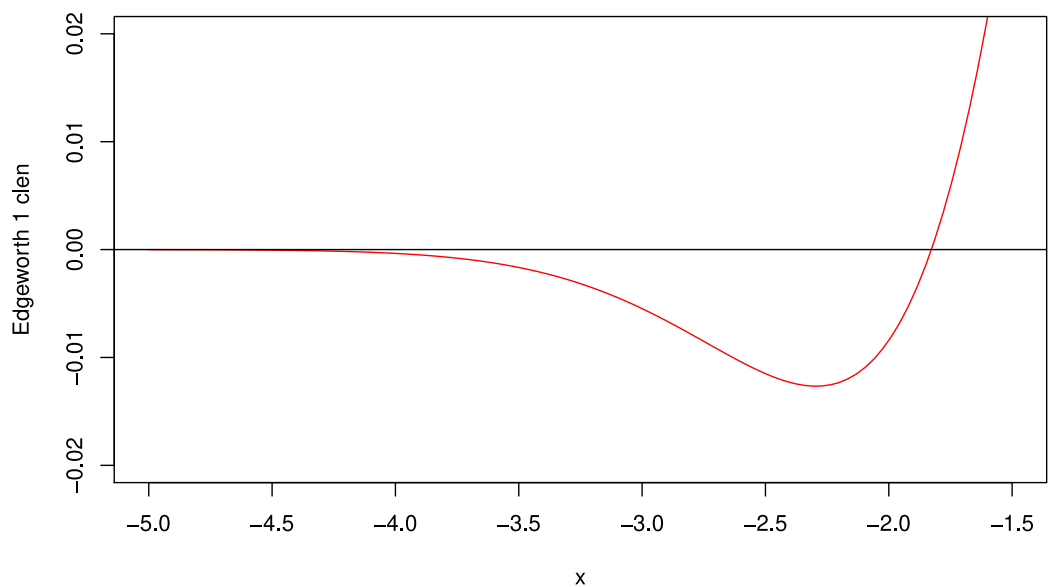
1.3.5 Problémy Edgeworthovej aproximácie

Ako sme mohli vidieť v predchádzajúcej časti, tak Edgeworthov rozvoj aproximuje skutočné rozdelenie "presnejšie" než normálna aproximácia. Edgeworthov rozvoj má aj nevýhody napr. ak by sme sa pozreli na obrázku 1.3 Edgeworthového rozvoja o dvoch členoch aproximácie distribučnej funkcie rozdelenia na interval $(-3, -1.5)$:



Obrázek 1.3: Edgeworthova aproximácia o dvoch členoch.

Môžeme vidieť, že táto aproximácia neklesajúcej funkcie s oborom hodnôt medzi 0 a 1, je v bode -2 záporná na intervale $(-3, -2)$ klesá. Rovnaký problém môžeme pozorovať aj pre Edgeworthov rozvoj s jedným členom, ukážka na obrázku 1.4.



Obrázek 1.4: Edgeworthova aproximácia o jednom člene.

Tento problém je spôsobený chybou $o(n^{-1/2})$ a $o(n^{-1})$ vo vzorci (1.27) a (1.28). Edgeworthová aproximácia distribučnej funkcie nemusí ani splňovať vlastnosti distribučnej funkcie.

2. Zovšeobecnenie Edgeworthovho rozvoja

2.1 Edgeworthov rozvoj pre hladkú transformáciu priemeru náhodných veličín

V predchádzajúcej kapitole sme ukázali ako môžeme použiť Edgeworthov rozvoj na aproximáciu distribučnej funkcie štandardizovaného súčtu nezávislých rovnako rozdelených veličín. Uviedli sme ako spočítať prvé dva členy Edgeworthovho rozvoja.

Edgeworthov rozvoj pre štandardizovaný súčet náhodných veličín nám, ale nedovoľuje aproximovať, napríklad, výberový rozptyl:

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2,$$

kde X_1, \dots, X_n sú nezávislé rovnako rozdelené náhodné veličiny s rozptylom $\sigma^2 \in (0, +\infty)$, $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$.

V tejto kapitole sa pokúsime odvodiť tvar Edgeworthovho rozvoja pre ďalšie veličiny, než len štandardizovaný súčet nezávislých veličín. Veličiny, ktoré v tejto kapitole budeme skúmať, budú dané transformáciou súčtu nezávislých náhodných veličín. O aké transformácie sa bude jednať, ukážeme v časti nižšie.

2.1.1 Transformácia súčtu nezávislých rovnako rozdelených vektorov

Na začiatok si zavedieme hladkú transformáciu, ako je zavedená v Hall (1992). Nech $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ sú nezávislé rovnako rozdelené d -rozmerné náhodné vektory so strednou hodnotou $\boldsymbol{\mu}$, a $\bar{\mathbf{X}}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i$. Zavedme si funkciu hladkej transformácie ako funkciu $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ danú dvoma známymi funkciami $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ a $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, pre ktoré platí: Nech pre parameter θ_0 daný ako $\theta_0 = g(\boldsymbol{\mu})$ platí, že $\hat{\theta}_n = g(\bar{\mathbf{X}}_n)$ je odhad parametru θ_0 .

Ďalej nech $h^2(\boldsymbol{\mu})$ je asymptotický rozptyl $n^{1/2}(\hat{\theta}_n - \theta_0)$ a nech $h(\bar{\mathbf{X}}_n)$ je odhad $h(\boldsymbol{\mu})$.

Potom zavedme funkciu $A(\mathbf{x})$ ako:

$$A(\mathbf{x}) = \frac{g(\mathbf{x}) - g(\boldsymbol{\mu})}{h(\boldsymbol{\mu})}, \quad (2.1)$$

pre známu hodnotu asymptotického rozptylu $n^{1/2}(\hat{\theta}_n - \theta_0)$, alebo

$$A(\mathbf{x}) = \frac{g(\mathbf{x}) - g(\boldsymbol{\mu})}{h(\mathbf{x})}, \quad (2.2)$$

pre odhadovanú hodnotu asymptotického rozptylu.

Pre funkciu $A(\mathbf{x})$ platí, že $A(\boldsymbol{\mu}) = 0$, čo plynie z (2.1) a (2.2).

Takto zavedená funkcia $A(\mathbf{x})$ nám povoľuje skúmať nielen úlohy pre štandardizovaný súčet náhodných veličín, ale aj úlohy, kde parameter θ_0 je daný ako stredná hodnota, rozptyl, podiel stredných hodnôt, podiel rozptylov alebo korelačný koeficient.

Zo zavedenia hladkej transformácie je jasné, že funkcie $g(\mathbf{x})$ a $h(\mathbf{x})$ sú spolu závislé, respektíve funkcia $h(\mathbf{x})$ plynie z funkcie $g(\mathbf{x})$. Jeden zo spôsobov ako odvodiť $h(\mathbf{x})$ z $g(\mathbf{x})$ je pomocou delta vety (pozri veta 7) a centrálnej limitnej vety (pozri veta 8). Z centrálnej limitnej vety plynie:

$$\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D} N_d(\mathbf{0}, \text{var} \mathbf{X}_1).$$

Potom následne z delta vety plynie:

$$n^{1/2}(g(\bar{\mathbf{X}}_n) - g(\boldsymbol{\mu})) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D} N(0, \nabla g(\boldsymbol{\mu})^T \text{var} \mathbf{X}_1 \nabla g(\boldsymbol{\mu})). \quad (2.3)$$

Zo vzťahu (2.3) a zo zavedenia funkcie $h(\mathbf{x})$ vieme, že

$$h^2(\boldsymbol{\mu}) = \nabla g(\boldsymbol{\mu})^T \text{var} \mathbf{X}_1 \nabla g(\boldsymbol{\mu}). \quad (2.4)$$

Zo vzorca (2.4) dostávame, že $h(\boldsymbol{\mu})$ funkcia strednej hodnoty vektoru \mathbf{X}_1 závisí na rozptyle, čo znamená, že by nemala závisieť len na hodnotách $\mathbf{E} \mathbf{X}_1$, ale aj na hodnotách $\mathbf{E} [\mathbf{X}_1^2]$, ktoré nie su uvažované. Aby sa tento problém obyšiel uvažujeme, že $\nabla g(\boldsymbol{\mu})$ je nulový v niektorých zložkách, tak aby funkcia $h(\mathbf{x})$ v bode $\boldsymbol{\mu}$ bola funkciou $\mathbf{E} \mathbf{X}_1$ a už nie ďalších momentov. Táto vlastnosť sa dá zaručiť vhodne zvolenými vektormi \mathbf{X}_i a funkciou $g(\mathbf{x})$, bude demonštrovaná na príkladoch v ďalšej časti.

2.1.2 Príklad hladkých transformácií

V tejto časti uvedieme 2 príklady hladkých transformácií. Pred tým, než zavedieme tieto transformácie, zavedieme značenie:

$$\bar{W}_n^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i^k.$$

Príklad hladkej transformácie pre θ_0 ako parameter strednej hodnoty veličín z náhodného výberu

Nech $\{W_1, \dots, W_n\}$ je náhodný výber z jednorozmerného rozdelenia so strednou hodnotou m a rozptylom σ^2 , a nech máme za úlohu odhadnúť parameter $\theta_0 = m$, potom by sme zvolili $d = 2$, $\mathbf{X}_i = (X_i^{(1)}, X_i^{(2)})^T = (W_i, W_i^2)^T$, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{E}(\mathbf{X}_i)$, a ďalej:

$$\begin{aligned} g(x^{(1)}, x^{(2)}) &= x^{(1)}, \quad \nabla g(x^{(1)}, x^{(2)}) = (1, 0)^T, \\ \nabla g(\mu^{(1)}, \mu^{(2)})^T (\text{var} \mathbf{X}_1) \nabla g(\mu^{(1)}, \mu^{(2)}) &= \mu^{(2)} - (\mu^{(1)})^2, \end{aligned}$$

$$h^2(x^{(1)}, x^{(2)}) = x^{(2)} - (x^{(1)})^2.$$

V tomto prípade platí, že:

$$g(\boldsymbol{\mu}) = m, g(\bar{\mathbf{X}}_n) = \bar{W}_n,$$

$$h^2(\boldsymbol{\mu}) = \sigma^2,$$

a nech:

$$h^2(\bar{\mathbf{X}}_n) = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i^{(2)} - \left(n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i^{(1)} \right)^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n \left(W_i - \bar{W}_n \right)^2 = \hat{\sigma}^2.$$

Tým sme odvodili funkcie $g(\mathbf{x})$ a $h(\mathbf{x})$ pre hladkú transformáciu pre parameter θ_0 daný ako stredná hodnota W_i . Hladká transformácia $A(\mathbf{x})$ v bode $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{X}}_n$ je nasledujúca:

$$A(\bar{\mathbf{X}}_n) = A((\bar{W}_n, \bar{W}_n^2)^T) = \frac{\bar{W}_n - m}{\sigma},$$

podľa (2.1) a

$$A(\bar{\mathbf{X}}_n) = A((\bar{W}_n, \bar{W}_n^2)^T) = \frac{\bar{W}_n - m}{\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n (W_i - \bar{W}_n)^2 \right)^{1/2}},$$

podľa (2.2).

Hladká transformácia podľa (2.1) súvisí s (1.1) z kapitoly jedna a môžeme vidieť, že:

$$\sqrt{n}A(\bar{\mathbf{X}}_n) = S_n,$$

tiež by sa mohlo zdať, že nepotrebujeme W_i^2 v \mathbf{X}_i , ale potom by sme nemohli zaviesť funkciu $h(\mathbf{x})$ pre hladkú transformáciu. Ako bolo ukázané v kapitole 1, dá sa pracovať i bez člena W_i^2 , ale nie v zmysle hladkej transformácie, ako budeme uvažovať v tejto kapitole.

Príklad hladkej transformácie pre θ_0 ako parameter rozptylu veličín z náhodného výberu

V prípade odhadovania parametru σ^2 , potrebujeme: $d = 4$ a $\mathbf{X}_i = (W_i, W_i^2, W_i^3, W_i^4)^T$, $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{E}(\mathbf{X}_i)$ potom:

$$g(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}) = x^{(2)} - (x^{(1)})^2,$$

$$\nabla g(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}) = (-2x^{(1)}, 1, 0, 0)^T$$

$$\begin{aligned} \nabla g(\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \mu^{(3)}, \mu^{(4)})^T (\text{var } \mathbf{X}_1) \nabla g(\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \mu^{(3)}, \mu^{(4)}) \\ = \mu^{(4)} - 4\mu^{(3)}\mu^{(1)} + 8\mu^{(2)}(\mu^{(1)})^2 - (\mu^{(2)})^2 - 4(\mu^{(1)})^4, \end{aligned}$$

$$h^2(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}) = x^{(4)} - 4x^{(1)}x^{(3)} + 6(x^{(1)})^2x^{(2)} - 3(x^{(1)})^4 - (x^{(2)} - (x^{(1)})^2)^2.$$

Potom platí:

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\mu}) &= \sigma^2, \\ g(\bar{\mathbf{X}}_n) &= \hat{\sigma}_n^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (W_i - \bar{W}_n)^2, \\ h^2(\boldsymbol{\mu}) &= \mathbb{E} (W_i - m)^4 - \sigma^4, \\ h^2(\bar{\mathbf{X}}_n) &= n^{-1} \sum_{i=1}^n (W_i - \bar{W}_i)^4 - \hat{\sigma}_n^4, \end{aligned}$$

kde odvodenie pre $\hat{\sigma}_n^2$ je rovnaké ako v príklade hladkej transformácie pre strednú hodnotu.

Tým pádom sme odvodili funkcie $g(\mathbf{x})$ a $h(\mathbf{x})$ pre hladkú transformáciu pre aproximáciu rozdelenia štandardizovaného rozptylu. Ukážka $A(\bar{\mathbf{X}}_n)$ podľa (2.1):

$$A(\bar{\mathbf{X}}_n) = A((\bar{W}_n, \bar{W}_n^2, \bar{W}_n^3, \bar{W}_n^4)^T) = \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n (W_i - \bar{W}_n)^2 - \sigma^2}{(\mathbb{E} (W_i - m)^4 - \sigma^4)^{1/2}},$$

a podľa (2.2):

$$A(\bar{\mathbf{X}}_n) = A((\bar{W}_n, \bar{W}_n^2, \bar{W}_n^3, \bar{W}_n^4)^T) = \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n (W_i - \bar{W}_n)^2 - \sigma^2}{(n^{-1} \sum_{i=1}^n (W_i - \bar{W}_i)^4 - \hat{\sigma}_n^4)^{1/2}}.$$

V obidvoch príkladoch sme prepísali funkciu $A(\mathbf{x})$ v bode $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{X}}_n$, a to z dôvodu, že práve v tomto bode budeme hľadať Edgeworthov rozvoj pre $\sqrt{n}A(\mathbf{x})$.

2.1.3 Edgeworthov rozvoj pre hladkú transformáciu

V nasledujúcej vete je zhrnutý Edgeworthov rozvoj pre hladké transformácie.

Veta 1. [Hall, 1992, str. 56] *Nech $j \geq 1$ a funkcia A je tvaru (2.1) alebo (2.2) a má spojitú deriváciu stupňa $j+2$ na nejakom okolí bodu $\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}[\mathbf{X}]$. Nadalej nech $A(\boldsymbol{\mu}) = 0$, $\mathbb{E}[\|\mathbf{X}\|^{j+2}] < \infty$ a zároveň platí, pre charakteristickú funkciu $\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$, že*

$$\limsup_{\|\mathbf{t}\| \rightarrow \infty} |\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})| < 1,$$

potom platí pre rozdelenie $A(\bar{\mathbf{X}}_n)$:

$$P(n^{1/2}A(\bar{\mathbf{X}}_n) \leq x) = \Phi(x) + n^{-1/2}p_1(x)\phi(x) + \dots + n^{-j/2}p_j(x)\phi(x) + o(n^{-j/2}), \quad (2.5)$$

kde $p_j(x)$ je polynóm maximálneho stupňa $3j-1$, nepárny pre párne j a párny pre nepárne j , s koeficientami závisiacimi na momentoch \mathbf{X} do stupňa $j+2$.

Dôkaz. Jednotlivé kroky dôkazu sú podrobne popísané v práci Hall (1992, str. 52-56).

□

Táto veta nám hovorí o existencii a tvare Edgeworthovho rozvoja v tvare asymptotickej rady.

V nasledujúcich častiach naznačíme odvodenie polynómu p_1 a jeho vzorec pre výpočet. Pre výpočet polynómu p_1 využijeme vetu 1 pre $j = 1$.

2.1.4 Rozvoj hladkej transformácie za pomoci Taylorovho rozvoja

Budeme sa snažiť odvodiť prvý člen Edgeworthovej aproximácie podobným spôsobom, ako to bolo v kapitole 1. Na začiatku si musíme stanoviť ku akej veličine budeme rozvíjať Edgeworthov rozvoj (ekvivalen S_n z kapitoly 1):

$$S_n = n^{1/2} A(\bar{\mathbf{X}}_n).$$

Narozdiel od predchádzajúcej kapitoly, S_n nie je vo forme sumy. Preto si zaviedieme $\mathbf{Z}_n = n^{1/2}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu})$, Z_n^i budeme označovať i -ty prvok \mathbf{Z}_n ($\mathbf{Z}_n = (Z_n^1, \dots, Z_n^d)^T$) a

$$a_{i_1, \dots, i_j} = \left(\frac{\partial^{(j)}}{\partial x^{(i_1)} \dots \partial x^{(i_j)}} \right) A(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}}. \quad (2.6)$$

Pretože predpokladáme, že $A(\boldsymbol{\mu}) = 0$, tak môžeme rozviesť $S_n = n^{1/2} A(\bar{\mathbf{X}}_n)$ za pomoci Taylorovho rozvoja v bode $\boldsymbol{\mu}$ (Jarník, 1984, str. 415).

$$\begin{aligned} S_n = & n^{1/2} A(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^d a_i Z_n^{(i)} + n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d a_{i_1, i_2} Z_n^{(i_1)} Z_n^{(i_2)} + \dots \\ & + n^{-(r-1)/2} \frac{1}{r!} \sum_{i_1=1}^d \dots \sum_{i_r=1}^d a_{i_1, \dots, i_r} Z_n^{(i_1)} \dots Z_n^{(i_r)} \\ & + n^{-r/2} \frac{1}{(r+1)!} \sum_{i_1=1}^d \dots \sum_{i_{r+1}=1}^d \left(\frac{\partial^{(r+1)}}{\partial x^{(i_1)} \dots \partial x^{(i_{r+1})}} \right) A(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}^*} Z_n^{(i_1)} \dots Z_n^{(i_{r+1})}, \end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{\xi}^*$ sa nachádza medzi $\bar{\mathbf{X}}$ a $\boldsymbol{\mu}$. Naďalej vieme z centrálnej limitnej vety, že $\mathbf{Z}_n = O_p(1)$ a, že $A(\boldsymbol{\mu}) = 0$. Potom, pretože $A(\mathbf{x})$ má spojité derivácie do $r+1$ stupňa na okolí $\boldsymbol{\mu}$ (pozri veta 1 pre $j+1 = r$), a $\bar{\mathbf{X}}_n \xrightarrow{P} \boldsymbol{\mu}$, tak môžeme predpokladať, že od istého $n_0 \in \mathbb{N}$ bude $\bar{\mathbf{X}}_n$ z okolia $\boldsymbol{\mu}$, a $\left(\frac{\partial^{(r+1)}}{\partial x^{(i_1)} \dots \partial x^{(i_{r+1})}} \right) A(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}^*}$ obmedzené pre všetky $\boldsymbol{\xi}^*$ nachádzajúce sa medzi $\bar{\mathbf{X}}_n$ a $\boldsymbol{\mu}$, pre $n \geq n_0$. A teda môžeme S_n rozdeliť na 2 časti:

$$S_n = S_{n,r} + O_p(n^{-r/2}),$$

kde $r \geq 1$ a $S_{n,r}$ je v tvare:

$$S_{n,r} = \sum_{i=1}^d a_i Z_n^{(i)} + n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d a_{i_1, i_2} Z_n^{(i_1)} Z_n^{(i_2)} + \dots$$

$$+ n^{-(r-1)/2} \frac{1}{r!} \sum_{i_1=1}^d \dots \sum_{i_r=1}^d a_{i_1, \dots, i_r} Z_n^{(i_1)} \dots Z_n^{(i_r)}. \quad (2.7)$$

Pre odvodenie člena $p_1(x)$ Edgeworthovho rozvoja nás bude zaujímať $r = 2$:

$$S_{n,2} = \sum_{i=1}^d a_i Z_n^{(i)} + n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d a_{i_1, i_2} Z_n^{(i_1)} Z_n^{(i_2)}.$$

Teraz môžeme pokračovať v odvodzovaní charakteristickej funkcie pre S_n . Ďalej pri určovaní charakteristickej funkcie položíme $S_n = S_{n,r}$ a zanedbáme chybový člen $O_p(n^{-r/2})$ (Pre definíciu O_p a o_p pozri Appendix definícia 5).

2.1.5 Odvodenie charakteristickej funkcie pre $S_{n,2}$

Podobne ako v kapitole 1 heuristicky prepíšeme charakteristickú funkciu pomocou kumulantov dostávame:

$$\psi_{S_{n,2}}(t) = \mathbb{E}(\exp(itS_{n,2})) = \exp(\kappa_{1,n,2}it + \frac{1}{2}\kappa_{2,n,2}(it)^2 + \dots + \frac{1}{j!}\kappa_{j,n,2}(it)^j + \dots), \quad (2.8)$$

kde $\kappa_{j,n,2}$ je j -ty kumulant náhodnej veličiny $S_{n,2}$ a je stupňa $n^{-(j-2)/2}$ (pozri (1.7)). Pri odvodzovaní kumulantov v kapitole 1, hneď vypadol člen κ_1 , pretože bol rovný 0 a člen κ_2 bol rovný 1. V tomto prípade to pre $S_{n,2}$ neplatí. Následujúca veta vysvetlí, aké sú kumulanty $S_{n,2}$ a ako ich rozviesť.

Veta 2. [Hall, 1992, str. 53] *Nech $\mathbf{Z}_n = n^{1/2}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu})$, kde $\bar{\mathbf{X}}_n$ je priemer n nezávislých rovnako rozdelených d -rozmerných vektorov \mathbf{X}_n , ktorý má konečné momenty do stupňa $2j$ a strednú hodnotu $\boldsymbol{\mu}$ a*

$$S_{n,2} = \sum_{i=1}^d a_i Z_n^{(i)} + n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d a_{i_1, i_2} Z_n^{(i_1)} Z_n^{(i_2)}$$

pre ľubovoľné pevné konštanty a_i a a_{i_1, i_2} . Potom j -ty kumulant $S_{n,2}$ má formu:

$$\kappa_{j,n,2} = n^{-(j-2)/2}(k_{j,1} + n^{-1}k_{j,2} + n^{-2}k_{j,3} + \dots), \quad (2.9)$$

kde konštanty $k_{j,l}$ závisia len na konštantách a_i , a_{i_1, i_2} a na momentoch \mathbf{X} až do $2j$ -tého stupňa.

Dôkaz. Jednotlivé kroky dôkazu všeobecnejšej vety (pre $S_{n,r}$) sú podrobne popísané v práci Hall (1992, str. 59-65). □

Z vety 2 vyplýva, že j -ty kumulant $S_{n,2}$ je v tvare (2.9). Pre konštanty $k_{1,1} = 0$ pretože $\kappa_{1,n,2}$ je prvý kumulant veličiny $S_{n,2}$, a keďže podľa (1.4) platí, že $\kappa_{1,n,2} = \mathbb{E}[S_{n,2}]$, naďalej platí, že

$$\kappa_{1,n,2} = n^{1/2}k_{1,1} + n^{-1/2}k_{j,2} + \dots + n^{-l+1/2}k_{l,2} + \dots,$$

tým pádom, ak ukážeme, že $\mathbb{E}[S_{n,2}] = 0 + O(n^{-1/2})$ potom platí, že $k_{1,1} = 0$. Platnosť $\mathbb{E}[S_{n,2}] = 0 + O(n^{-1/2})$ bude ukázaná v (2.16).

Pre $\kappa_{2,n,2}$ platí, že $k_{2,1} = 1$ pretože:

$$\kappa_{2,n,2} = k_{2,1} + n^{-1}k_{2,2} + \dots + n^{-l+1}k_{2,l} + \dots,$$

$\kappa_{2,n,2} = \text{var}(S_{n,2})$, a pokiaľ ukážeme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}[S_{n,2}] = 1$, tak to bude znamenať že $k_{2,1} = 1$.

Ukážka $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}[S_{n,2}] = 1$: vzhľadom na to, že pre $h^2(\boldsymbol{\mu})$ platí:

$$h^2(\boldsymbol{\mu}) = \nabla g(\boldsymbol{\mu})^T \Sigma(\boldsymbol{\mu}) \nabla g(\boldsymbol{\mu}).$$

, čo bude ukázané v (2.16) pokiaľ zoberieme do úvahy, že:

$$a_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \right) A(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \right) g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}}}{h(\boldsymbol{\mu})}, \quad (2.10)$$

tento výraz pre (2.1) plyní priamo. Pre zápis (2.2) sa odvodí následovne:

$$\begin{aligned} a_i &= \left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \right) A(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \\ &= \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \right) g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} - \left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \right) h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} (g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} - g(\boldsymbol{\mu}))}{h^2(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}}} \\ &= \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \right) g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} h(\boldsymbol{\mu}) - \left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \right) h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} (g(\boldsymbol{\mu}) - g(\boldsymbol{\mu}))}{h^2(\boldsymbol{\mu})} \\ &= \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \right) g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}}}{h(\boldsymbol{\mu})}. \end{aligned}$$

Teraz budeme pokračovať v odvodzovaní charakteristickej funkcie pre $S_{n,2}$, tým, že dosadíme konštanty $k_{j,i}$ z vety 2 späť do charakteristickej funkcie z (2.8). Dostávame:

$$\begin{aligned} \psi_{S_{n,2}}(t) &= \exp \left(-\frac{1}{2}t^2 + n^{-1/2} \left(k_{1,2}(it) + \frac{1}{6}k_{3,1}(it)^3 \right) \right. \\ &\quad \left. + n^{-1} \left(\frac{1}{2}k_{2,2}(it)^2 + \frac{1}{24}k_{4,1}(it)^4 \right) + \dots \right). \end{aligned}$$

Teraz môžeme aplikovať postup z kapitoly 1 pre prepis charakteristickej funkcie v tvare exponenciály do tvaru charakteristickej funkcie $N(0,1)$ rozdelenia a polynómu (pozri kapitola 1, časť Vyjadrenie charakteristickej funkcie S_n ako násobok

charakteristickej funkcii $N(0,1)$ a polynómu, konkrétne vzorce (1.8)).

$$\begin{aligned}\psi_{S_{n,2}}(t) = & e^{-\frac{1}{2}t^2} \left(1 + n^{-1/2} \left[k_{1,2}(it) + \frac{1}{6} k_{3,1}(it)^3 \right] \right. \\ & \left. + n^{-1} \left[\left(\frac{1}{2} k_{2,2}(it)^2 + \frac{1}{24} k_{4,1}(it)^4 \right) + \frac{1}{2} \left(k_{1,2}(it) + \frac{1}{6} k_{3,1}(it)^3 \right)^2 \right] + \dots \right).\end{aligned}$$

A z tohto tvaru môžeme vyjadriť r_1 a r_2 :

$$\psi_{S_{n,2}}(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} + n^{-1/2} r_1(it) e^{-\frac{1}{2}t^2} + n^{-1} r_2(it) e^{-\frac{1}{2}t^2} + \dots + n^{-j/2} r_j(it) e^{-\frac{1}{2}t^2} + \dots$$

Vyjadrenie r_1 a r_2 :

$$\begin{aligned}r_1(x) &= k_{1,2}x + \frac{1}{6} k_{3,1}x^3, \\ r_2(x) &= \left(\frac{1}{2} k_{2,2}x^2 + \frac{1}{24} k_{4,1}x^4 \right) + \frac{1}{2} \left(k_{1,2}x + \frac{1}{6} k_{3,1}x^3 \right)^2.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Potom môžeme z tohto výrazu odvodzovať p_1 rovnakým postupom ako v kapitole 1 (pozri (1.20) a (1.22)).

2.1.6 Vyjadrenie p_1 Edgeworthovho rozvoja

V tejto časti si zavedieme nasledujúce značenie pre zjednodušenie zápisu:

$$(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^{(i_j)} = X^{(i_j)} - \mu^{(i_j)}.$$

Ďalej sa pozrieme bližšie na vzorec (2.7) a pokúsime sa vyjadriť p_1 , ktorý je 1. členom Edgeworthovho rozvoja. Zároveň je aj jediným členom, okrem distribučnej funkcie $N(0,1)$, pokiaľ by sme chceli funkciu S_n aproximovať súčtom $S_{n,r}$ pre $r = 2$ (pre pripomenutie $\mathbf{Z}_n = n^{1/2}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu})$). Pre vyjadrenie p_1 potrebujeme poznať prvé 3 kumulanty, a tým pádom aj prvé 3 momenty $S_{n,2}$. Nech

$$\mu_{i_1, \dots, i_j} = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^{(i_1)} \dots (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^{(i_j)}], \text{ pre } j \geq 1.\tag{2.12}$$

Potom $\mu_i = 0$ a teda i $E(Z^{(i)}) = 0$ pre každé i .

Pre súčin 2 členov:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z^{(i)} Z^{(j)}) &= \mathbb{E}[n^{1/2}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu})^{(i)} n^{1/2}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu})^{(j)}] \\ &= n \left(\mathbb{E} \left[\frac{\sum_{k=1}^n (\mathbf{X}_k - \boldsymbol{\mu})^{(i)}}{n} \frac{\sum_{k=1}^n (\mathbf{X}_k - \boldsymbol{\mu})^{(j)}}{n} \right] \right) \\ &= n^{-1} \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \mathbb{E}[(\mathbf{X}_k - \boldsymbol{\mu})^{(i)} (\mathbf{X}_l - \boldsymbol{\mu})^{(j)}] \right) \\ &\stackrel{\text{nezávislosť}}{=} n^{-1} \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(\mathbf{X}_k - \boldsymbol{\mu})^{(i)} (\mathbf{X}_k - \boldsymbol{\mu})^{(j)}] \right) \\ &= \mu_{i,j}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Pre súčin 3 členov:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z^{(i)}Z^{(j)}Z^{(k)}) &= \mathbb{E}[n^{1/2}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu})^{(i)}n^{1/2}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu})^{(j)}n^{1/2}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu})^{(k)}] \\
&= n^{3/2}\left(\mathbb{E}\left[\frac{\sum_{r=1}^n(\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(i)}}{n}\frac{\sum_{s=1}^n(\mathbf{X}_s - \boldsymbol{\mu})^{(j)}}{n}\frac{\sum_{t=1}^n(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})^{(k)}}{n}\right]\right) \\
&= n^{-3/2}\left(\sum_{r=1}^n\sum_{s=1}^n\sum_{t=1}^n\mathbb{E}[(\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(i)}(\mathbf{X}_s - \boldsymbol{\mu})^{(j)}(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})^{(k)}]\right) \\
&\stackrel{\text{nezávislosť}}{=} n^{-3/2}\left(\sum_{r=1}^n\mathbb{E}[(\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(i)}(\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(j)}(\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(k)}]\right) \\
&= n^{-1/2}\mu_{i,j,k}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Pre súčin 4 členov:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(Z^{(i)}Z^{(j)}Z^{(k)}Z^{(l)}) \\
&= n^{-2}\left(\sum_{r=1}^n\sum_{s=1}^n\sum_{t=1}^n\sum_{u=1}^n\mathbb{E}[(\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(i)}(\mathbf{X}_s - \boldsymbol{\mu})^{(j)}(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})^{(k)}(\mathbf{X}_u - \boldsymbol{\mu})^{(l)}]\right) \\
&\stackrel{\text{nezávislosť}}{=} n^{-2}\left(\sum_{r=1}^n\sum_{s=1}^n\mathbb{E}[(\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(i)}(\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(j)}(\mathbf{X}_s - \boldsymbol{\mu})^{(k)}(\mathbf{X}_s - \boldsymbol{\mu})^{(l)}]\right. \\
&\quad + \sum_{r=1}^n\sum_{s=1}^n\mathbb{E}[(\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(i)}(\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(k)}(\mathbf{X}_s - \boldsymbol{\mu})^{(j)}(\mathbf{X}_s - \boldsymbol{\mu})^{(l)}] \\
&\quad + \sum_{r=1}^n\sum_{s=1}^n\mathbb{E}[(\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(i)}(\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(l)}(\mathbf{X}_s - \boldsymbol{\mu})^{(j)}(\mathbf{X}_s - \boldsymbol{\mu})^{(k)}] \\
&\quad \left. - 2\sum_{r=1}^n\mathbb{E}[(\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(i)}(\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(j)}(\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(k)}(\mathbf{X}_r - \boldsymbol{\mu})^{(l)}]\right) \\
&\stackrel{\text{nezávislosť}}{=} n^{-2}\left(n^2\mu_{i,j}\mu_{k,l} + n^2\mu_{i,k}\mu_{j,l} + n^2\mu_{i,l}\mu_{k,j} - 2n\mu_{i,j,k,l}\right) \\
&= \mu_{i,j}\mu_{k,l} + \mu_{i,k}\mu_{j,l} + \mu_{i,l}\mu_{k,j} + O(n^{-1}).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Pre výpočet $p_1(x)$ nám bude stačiť vyjadrenie prvých 4 momentov, aj keď vyjadrenie bude obsahovať výraz $\mathbb{E}[S_{n,2}^3]$. Budeme vidieť, že všetky momenty stupňa 5 a viac, sa budú nachádzať pri člene $O(n^{-1})$, a teda ich nemusíme brať do úvahy.

Momentálne, keď si zoberieme $r = 2$ z vyjadrenia (2.7), tak dostávame vyjadrenie pre S_n :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^d a_i Z^{(i)} + n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d a_{i_1, i_2} Z^{(i_1)} Z^{(i_2)} + O(n^{-1}), \\
S_{n,2} &= \sum_{i=1}^d a_i Z^{(i)} + n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d a_{i_1, i_2} Z^{(i_1)} Z^{(i_2)}.
\end{aligned}$$

A pre momenty $S_{n,2}$ platí (za použitia predchádzajúcich vzorcov (2.13), (2.14)

a (2.15)), že:

$$\begin{aligned}
E[S_{n,2}] &= n^{-1/2} \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d a_{i_1, i_2} \mu_{i_1, i_2}, \\
E[S_{n,2}^2] &= \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d a_{i_1} a_{i_2} \mu_{i_1, i_2} + O(n^{-1}), \\
E[S_{n,2}^3] &= \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d \sum_{i_3=1}^d a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} n^{-1/2} \mu_{i_1, i_2, i_3} \\
&\quad + 3 \frac{1}{2} n^{-1/2} \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d \sum_{i_3=1}^d \sum_{i_4=1}^d a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3, i_4} (\mu_{i_1, i_2} \mu_{i_3, i_4} + \mu_{i_1, i_3} \mu_{i_2, i_4} + \mu_{i_1, i_4} \mu_{i_2, i_3}) \\
&\quad + O(n^{-1}).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Keď už máme prvé tri momenty $S_{n,2}$ vyjadrené, tak môžeme vyjadriť kumulanty:

$$\begin{aligned}
\kappa_{1,n} &= E[S_{n,2}] = n^{-1/2} A_1, \\
\kappa_{2,n} &= E[S_{n,2}^2] - (E[S_{n,2}])^2 = \sigma^2 + O(n^{-1}), \\
\kappa_{3,n} &= E[S_{n,2}^3] - 3E[S_{n,2}^2]E[S_{n,2}] + 2(E[S_{n,2}])^3 = n^{-1/2} A_3 + O(n^{-1})
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Kde:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d a_{i_1, i_2} \mu_{i_1, i_2}, \\
\sigma^2 &= \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d a_{i_1} a_{i_2} \mu_{i_1, i_2}, \\
A_3 &= \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d \sum_{i_3=1}^d a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} \mu_{i_1, i_2, i_3} + 3 \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d \sum_{i_3=1}^d \sum_{i_4=1}^d a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3, i_4} \mu_{i_1, i_2} \mu_{i_3, i_4}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Ako bolo uvedené v (2.9), pre kumulanty $S_{n,2}$ platí, že sa dajú vyjadriť v tvare:

$$\kappa_{j,n,2} = n^{-(j-2)/2} (k_{j,1} + n^{-1} k_{j,2} + \dots).$$

Môžeme vidieť, že $k_{1,2} = A_1$, $k_{3,1} = A_3$. Vďaka tomu, že $S_{n,2}$ má asymptoticky jednotkový rozptyl a $\kappa_{2,1} = \sigma^2 + O(n^{-1})$, platí $\sigma^2 = 1$. Teraz máme všetky informácie na vyjadrenie p_1 .

Poznámka: Ak by sme na začiatku uvažovali $A(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - g(\boldsymbol{\mu})$, tak potom by Edgeworthov rozvoj z vety 1 musel byť upravený nasledujúco:

$$P\left(n^{1/2} \frac{A(\bar{\mathbf{X}}_n)}{\sigma} \leq x\right) = \Phi(x) + n^{-1/2} p_1(x) \phi(x) + \dots + n^{-j/2} p_j(x) \phi(x) + o(n^{-j/2}) \tag{2.19}$$

s tým, že členy a_{i_1, i_2} a a_{i_1} by boli odvodzované z derivácií výrazu $A(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - g(\boldsymbol{\mu})$ a členy μ_{i_1, i_2} a μ_{i_1} zostávajú rovnaké. Potom by $k_{1,2} = A_1/\sigma$, $k_{3,1} = A_3/\sigma^3$.

2.1.7 Finálny vzorec pre výpočet p_1 Edgeworthovho rozvoja

Na základe vyjadrenia $r_1(x)$ z (2.11) máme:

$$r_1(x) = k_{1,2}x + \frac{1}{6}k_{3,1}x^3$$

Následne, pokiaľ aplikujeme postup z kapitoly 1 pre odvodenie $R_j(x) = r_j(-D)\Phi(x)$ (pozri časť prepis členov polynómu za pomoci hustoty $N(0,1)$ a jej derivácií, konkrétne (1.20)) a aplikujeme vzorce (1.21), dostávame:

$$R_1(x) = k_{1,2}(-\phi(x)) + \frac{1}{6}k_{3,1}(-\phi(x)(x^2 - 1)),$$

čo môžeme upraviť do tvaru:

$$R_1(x) = \left(-k_{1,2} - \frac{1}{6}k_{3,1}(x^2 - 1)\right)\phi(x).$$

Z toho je vidieť, že:

$$p_1(x) = -k_{1,2} - \frac{1}{6}k_{3,1}(x^2 - 1).$$

A pokiaľ dosadíme $k_{1,2} = A_1/\sigma$, $k_{3,1} = A_3/\sigma^3$, tak môžeme vidieť, že

$$p_1(x) = -A_1\sigma^{-1} - \frac{1}{6}A_3\sigma^{-3}(x^2 - 1), \quad (2.20)$$

pre $A_1, \sigma^2 > 0$ a A_3 sú počítané ako v (2.18).

Tento výraz platí pre $A(\mathbf{x})$ z (2.1) alebo (2.2) a aproximáciu $P(n^{1/2}A(\bar{\mathbf{X}}_n) \leq x)$ z vety 1 s tým, že $\sigma = 1$. A tiež tento výraz platí pre $A(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - g(\boldsymbol{\mu})$ a aproximáciu v tvare (2.19).

Tým sme odvodili p_1 člen Edgeworthového rozvoja pre hladkú transformáciu súčtu náhodných veličín.

2.2 Cornish-Fisherov rozvoj

Vo viacerých štatistických testoch nás nezaujímajú len aproximácia rozdelenia náhodnej veličiny, ale aj kvantily na hladine α . Edgeworthov rozvoj nám udáva aproximáciu distribučnej funkcie rozdelenia, no pokiaľ by sme tento rozvoj použili pre aproximácie kvantilov, tak ho nazývame Cornish-Fisherov rozvoj.

2.2.1 Zavedenie rozvoja

Nech S_n je náhodná veličina, ktorej rozdelenie splňuje podmienky vety 1 pre Edgeworthov rozvoj. Potom nech: $w_\alpha = w_\alpha(n)$ je α -kvantil náhodnej veličiny S_n definovaný ako:

$$w_\alpha = \inf\{x : P(S_n \leq x) \geq \alpha\}.$$

A nech u_α je α -kvantil štandardného normálneho rozdelenia $\Phi(u_\alpha) = \alpha$. Potom predpokladajme nasledujúci rozvoj:

$$w_\alpha = u_\alpha + n^{-1/2}p_{11}(u_\alpha) + n^{-1}p_{21}(u_\alpha) + \dots, \quad (2.21)$$

a tiež zavedieme

$$u_\alpha = w_\alpha + n^{-1/2}p_{12}(w_\alpha) + n^{-1}p_{22}(w_\alpha) + \dots, \quad (2.22)$$

kde funkcie p_{j1} a p_{i2} sú polynómy. Naďalej predpokladajme, že rovnomerne konvergujú na intervale pre $\alpha \in (\epsilon, 1 - \epsilon)$ pre $\epsilon \in (0, 1/2)$. Oba tieto rozvoje sa nazývajú Cornish-Fisherove rozvoje.

2.2.2 Odvodenie Cornish-Fisherovho rozvoja z Edgeworthovho rozvoja

Cornish-Fisherov rozvoj sa dá odvodiť z Edgeworthovho rozvoja a polynómy p_{j1} a p_{i2} z (2.21) a (2.22) sú jednoznačne určené polynómom p_i z (2.5). Táto súvislosť sa dá ukázať tým, že do Edgeworthovho rozvoju v (2.5) dosadíme rozvoj pre w_α :

$$\begin{aligned} P(S_n \leq w_\alpha) = \alpha = \Phi\left(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha)\right) \\ + \sum_{i \geq 1} n^{-i/2} p_i\left(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha)\right) \phi\left(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha)\right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

pre $\alpha \in (0, 1)$. p_{i2} môžeme vyjadriť z (2.21), (2.22) a zo vzorca (2.23), tým že si zoberieme vzorec (2.21) pre w_α a dosadíme ho do pravej strany za w_α vo vzorci (2.22):

$$u_\alpha = u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha) + \sum_{i \geq 1} n^{-i/2} p_{i2}\left(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha)\right).$$

Z toho vyplýva, že ak poznáme $p_{j1}(x)$ z (2.23), tak vieme vyjadriť $p_{i2}(x)$ z rovnice:

$$\sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(x) + \sum_{i \geq 1} n^{-i/2} p_{i2}\left(x + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(x)\right) = 0. \quad (2.24)$$

2.2.3 Odvodenie p_{11} a p_{21}

Zo vzorca (2.23) sa dá ukázať, že p_{j1} sa musí dať zapísať pomocou p_1, p_2, \dots, p_j , kvôli tomu, že ak rozvineme funkciu $\Phi\left(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha)\right)$, potom členy $n^{-j/2}$ sa musia rovnať pre všetky $j \geq 1$, a teda môžeme vyjadriť p_{11} a p_{21} , za pomoci všetkých členov radu $n^{-1/2}$ a n^{-1} . Toto vyjadrenie urobíme za pomoci niekoľkých Taylorových rozvojev:

1. člen rozvoja z (2.23) je $\Phi(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha))$ a ten rozviníme pre $u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha)$ v bode u_α , označme si tento rozvoj θ_1 :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \Phi\left(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha)\right) = \Phi(u_\alpha) \\ &\quad + \left(n^{-1/2} p_{11}(u_\alpha) + n^{-1} p_{21}(u_\alpha) + O(n^{-3/2})\right) \phi(u_\alpha) \\ &\quad + 1/2 \left((n^{-1/2} p_{11}(u_\alpha))^2 + O(n^{-3/2})\right) (-u_\alpha) \phi(u_\alpha) \\ &\quad + O(n^{-3/2}). \end{aligned}$$

Potom pre 2. člen, označme ho θ_2 :

$$\theta_2 = n^{-1/2} p_1\left(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha)\right) \phi\left(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha)\right),$$

budeme rozvíjať funkciu $\phi(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha))$ v bode u_α , a zároveň budeme rozvíjať funkciu $p_1(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha))$ v bode u_α .

Pre $p_1(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha))$:

$$p_1\left(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha)\right) = p_1(u_\alpha) + p_1'(u_\alpha)(n^{-1/2} p_{11}(u_\alpha) + O(n^{-1})) + O(n^{-1}),$$

pre $\phi(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha))$:

$$\begin{aligned} \phi\left(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha)\right) &= \phi(u_\alpha) + (-u_\alpha)(n^{-1/2} p_{11}(u_\alpha) + O(n^{-1})) \phi(u_\alpha) \\ &\quad + O(n^{-1}). \end{aligned}$$

A teda

$$\theta_2 = n^{-1/2} p_1(u_\alpha) \phi(u_\alpha) + n^{-1} \left(p_1'(u_\alpha) p_{11}(u_\alpha) \phi(u_\alpha) - u_\alpha p_{11}(u_\alpha) p_1(u_\alpha)\right) + O(n^{-3/2}).$$

Pre 3. člen, označme ho θ_3 :

$$\theta_3 = n^{-1} p_2\left(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha)\right) \phi\left(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha)\right),$$

budeme rozvíjať funkciu $\phi(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha))$ v bode u_α , a zároveň budeme rozvíjať funkciu $p_2(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha))$ v bode u_α .

Pre $p_2(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha))$:

$$p_2\left(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha)\right) = p_2(u_\alpha) + O(n^{-1/2}),$$

pre $\phi(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha))$:

$$\phi\left(u_\alpha + \sum_{j \geq 1} n^{-j/2} p_{j1}(u_\alpha)\right) = \phi(u_\alpha) + O(n^{-1/2}).$$

A teda

$$\theta_3 = n^{-1}p_2(u_\alpha)\phi(u_\alpha) + O(n^{-3/2}).$$

Pre odvodenie p_{11} a p_{21} nepotrebuje ďalšie členy, lebo všetky ostatné členy sú typu $O(n^{-3/2})$, a teda ak predchádzajúce vyjadrenia vložíme do (2.23), tak dostávame:

$$\begin{aligned} \alpha &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots \\ &= \Phi(u_\alpha) + \left(n^{-1/2}p_{11}(u_\alpha) + n^{-1}p_{21}(u_\alpha) \right) \phi(u_\alpha) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(n^{-1/2}p_{11}(u_\alpha) \right)^2 u_\alpha \phi(u_\alpha) \\ &\quad + n^{-1/2} \left(p_1(u_\alpha)\phi(u_\alpha) + n^{-1/2}p_{11}(u_\alpha) \left(p'_1(u_\alpha) - u_\alpha p_1(u_\alpha) \right) \phi(u_\alpha) \right) \\ &\quad + n^{-1}p_2(u_\alpha)\phi(u_\alpha) + O(n^{-3/2}) \\ &= \alpha + n^{-1/2} \left(p_{11}(u_\alpha) + p_1(u_\alpha) \right) \phi(u_\alpha) \\ &\quad + n^{-1} \left(p_{21}(u_\alpha) - \frac{1}{2}u_\alpha p_{11}(u_\alpha)^2 + p_{11}(u_\alpha) \left(p'_1(u_\alpha) - u_\alpha p_1(u_\alpha) \right) \right. \\ &\quad \left. + p_2(u_\alpha) \right) \phi(u_\alpha) + O(n^{-3/2}). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Z rovnice (2.25) po porovnaní členov pri $n^{-j/2}$ pre $j \in 1, 2$ vyplýva, že

$$p_{11}(x) = -p_1(x), \tag{2.26}$$

a

$$p_{21}(x) = p_1(x)p'_1(x) - \frac{1}{2}xp_1(x)^2 - p_2(x). \tag{2.27}$$

Tým sme odvodili prvé 2 členy (2.21).

2.2.4 Vzorce pre p_{12} a p_{22} Cornish-Fisherovho rozvoja

Členy p_{12} a p_{22} sa dajú odvodiť z (2.24).

$$\begin{aligned} n^{-1/2}p_{11}(x) + n^{-1}p_{21}(x) + O(n^{-3/2}) + n^{-1/2}p_{12}(x + n^{-1/2}p_{11}(x) + O(n^{-1})) \\ + n^{-1}p_{22}(x + O(n^{-1/2})) = 0. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Podobne ako p_{i1} , môžeme v (2.28) rozviesť p_{12} a p_{22} za pomoci Taylorovho rozvoja v bode x .

$$\begin{aligned} n^{-1/2}p_{11}(x) + n^{-1}p_{21}(x) + O(n^{-3/2}) + n^{-1/2}p_{12}(x) + n^{-1}p'_{12}(x)p_{11}(x) + O(n^{-3/2}) \\ + n^{-1}p_{22}(x) + O(n^{-3/2}) = 0 \\ = n^{-1/2}(p_{11}(x) + p_{12}(x)) + n^{-1}(p_{21}(x) + p'_{12}(x)p_{11}(x) + p_{22}(x)) + O(n^{-3/2}). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Z (2.29), (2.26) a (2.27) môžeme vidieť, že:

$$p_{12}(x) = -p_{11}(x) = p_1(x),$$

a

$$\begin{aligned} p_{22}(x) &= -p_{21}(x) - p'_{12}(x)p_{11}(x) \\ &= -p_1(x)p'_1(x) + \frac{1}{2}xp_1(x)^2 + p_2(x) + p'_1(x)p_1(x) \\ &= p_2(x) + \frac{1}{2}xp_1(x)^2. \end{aligned}$$

Tým sme odvodili vzorce pre členy p_{21} a p_{22} .

3. Príklady Edgeworthovho rozvoja

V tejto časti si ukážeme príklady Edgeworthovho rozvoja o jednom člene.

3.1 Aproximácia rozdelenia štandardizovaného výberového rozptylu nezávislých náhodných veličín z exponenciálneho rozdelenia

V tomto príklade nadviažeme na príklad z kapitoly 1, kde sme Edgeworthovým rozvojom aproximovali normovaný súčet n nezávislých náhodných veličín z exponenciálneho rozdelenia o strednej hodnote $\mu = 1$.

3.1.1 Zavedenie odhadu

V tejto časti budeme aproximovať rozdelenie odhadu rozptylu v tvare

$$\bar{W}_n^2 - (\bar{W}_n)^2,$$

kde W_1, \dots, W_n pochádzajú z exponenciálneho rozdelenia so strednou hodnotou λ a hustotou:

$$f_{W_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right), & \text{kde } x \geq 0, \\ 0, & \text{kde } x < 0, \end{cases}$$

a $\bar{W}_n^j = n^{-1} \sum_{i=1}^n W_i^j$.

Na začiatok určíme funkciu $A(\mathbf{x})$, ktorá bola popísaná v kapitole 2, časť 2.1.2. Príklad hladkých transformácií, konkrétne príklad hladkej transformácie pre θ_0 dané ako rozptyl z náhodného výberu. Tým pádom zavedme

$\mathbf{X}_i = (W_i, W_i^2, W_i^3, W_i^4)^T$ pre $i \in \{1, 2, 3\}$ a vektor $\boldsymbol{\mu} = (\mathbb{E}[W_i], \mathbb{E}[W_i^2], \mathbb{E}[W_i^3], \mathbb{E}[W_i^4])^T = (\lambda, 2\lambda^2, 6\lambda^3, 24\lambda^4)^T$.

Potom:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) &= x^{(2)} - (x^{(1)})^2, \\ g(\boldsymbol{\mu}) &= \lambda^2, \\ h^2(\mathbf{x}) &= x^{(4)} - 4x^{(1)}x^{(3)} + 6(x^{(1)})^2x^{(2)} - 3(x^{(1)})^4 - (x^{(2)} - (x^{(1)})^2)^2, \\ h^2(\boldsymbol{\mu}) &= 8\lambda^4, \end{aligned} \tag{3.1}$$

Takže $A(\mathbf{x})$ je v tvare:

$$A(\mathbf{x}) = \frac{g(\mathbf{x}) - \lambda^2}{h(\mathbf{x})}.$$

A budeme sa snažiť určiť rozdelenie $A(\bar{\mathbf{X}}_n)$ v tvare:

$$A(\bar{\mathbf{X}}_n) = \frac{(\bar{W}_n^2 - (\bar{W}_n)^2) - \lambda^2}{\sqrt{\bar{W}_n^4 - 4\bar{W}_n\bar{W}_n^3 + 6(\bar{W}_n)^2\bar{W}_n^2 - 3(\bar{W}_n)^4 - (\bar{W}_n^2 - (\bar{W}_n)^2)^2}},$$

čo môžeme prepísať do tvaru:

$$A(\bar{\mathbf{X}}_n) = \frac{(\bar{W}_n^2 - (\bar{W}_n)^2) - \lambda^2}{\sqrt{n^{-1} \sum_{i=1}^n (W_i - \bar{W}_n)^4 - (\bar{W}_n^2 - (\bar{W}_n)^2)^2}},$$

ktorý budeme naďalej podľa vety 1 aproximovať nasledovne:

$$P(n^{1/2} A(\bar{\mathbf{X}}_n) \leq x) = \Phi(x) + n^{-1/2} p_1(x) \phi(x) + o(n^{-1/2}),$$

kde p_1 vypočítame pomocou vzorca (2.20). A pre jeho výpočet budeme potrebovať hodnoty a_i , $a_{i,j}$ a μ_{i_1, i_2} , μ_{i_1, i_2, i_3} pre $i, j, i_1, i_2, i_3 \in 1, 2, 3, 4$ z (2.6).

Dá sa ukázať (DasGupta, 2008, str. 42), že:

$$n^{1/2} \left((\bar{W}_n^2 - (\bar{W}_n)^2) - \text{var}(W_i) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} N \left(0, E \left(W_i - E(W_i) \right)^4 - (\text{var}(W_i))^2 \right).$$

A teda:

$$n^{1/2} A(\bar{\mathbf{X}}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} N(0, 1).$$

V tomto príklade sa pokúsime vylepšiť túto aproximáciu za pomoci Edgeworthovho rozvoja pre W_i z exponenciálneho rozdelenia.

Momentálne, keď si uvedomíme, že platí, ak $W_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, potom pre $W_i^* = \frac{1}{\lambda} W_i$ platí, že $W_i^* \sim \text{Exp}(1)$. Teraz, ak by sme porovnali $A(\bar{\mathbf{X}}_n^*)$, založenú na W_i^* , s $A(\bar{\mathbf{X}}_n)$ dostávame, že:

$$A(\bar{\mathbf{X}}_n) = \frac{g(\bar{\mathbf{X}}_n) - \lambda^2}{h(\bar{\mathbf{X}}_n)} = \frac{\lambda^2 g(\bar{\mathbf{X}}_n^*) - \lambda^2}{\lambda^2 h(\bar{\mathbf{X}}_n^*)} = \frac{g(\bar{\mathbf{X}}_n^*) - 1}{h(\bar{\mathbf{X}}_n^*)} = A(\bar{\mathbf{X}}_n^*).$$

Tento vzťah môžeme ľahko vidieť zo vzorcov (3.1) po dosadení $\bar{\mathbf{X}}_n$ do $g(\mathbf{x})$ a $h(\mathbf{x})$ pre $W_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, a využitie vzťahu $\lambda W_i^* = W_i$. Tým môžeme vidieť, že rozdelenie $A(\bar{\mathbf{X}}_n)$ sa nemení s parametrom λ , a teda pre zvyšok príkladu, bez ujmy na všeobecnosti, budeme uvažovať, že $\lambda = 1$. A naše $A(\mathbf{x})$ je v tvare:

$$A(\mathbf{x}) = \frac{(x^{(2)} - (x^{(1)})^2) - 1}{\sqrt{x^{(4)} - 4x^{(1)}x^{(3)} + 6(x^{(1)})^2x^{(2)} - 3(x^{(1)})^4 - (x^{(2)} - (x^{(1)})^2)^2}},$$

a naďalej budeme pokračovať vo výpočte a_i , $a_{i,j}$, μ_i a $\mu_{i,j}$.

3.1.2 Výpočet a_i a $a_{i,j}$

Teraz odvodíme hodnoty a_i a $a_{i,j}$. Z (2.10) vieme, že pre a_i platí:

$$a_i = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \right) g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}}}{h(\boldsymbol{\mu})},$$

a teda

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{-2(x^{(1)})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}}}{\sqrt{8}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \\
a_2 &= \frac{\sqrt{2}}{4}, \\
a_3 &= 0, \\
a_4 &= 0.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Výpočet $a_{i,j}$ je naďalej popísaný nižšie:

$$\begin{aligned}
a_{i,j} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}} \right) A(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \right) \frac{\frac{\partial}{\partial x^{(j)}} g(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} h(\mathbf{x}) [g(\mathbf{x}) - g(\boldsymbol{\mu})]}{h^2(\mathbf{x})} \Big|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \\
&= \frac{v_1 - v_2}{h^4(\boldsymbol{\mu})},
\end{aligned}$$

kde v_1 je:

$$\begin{aligned}
v_1 &= \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{(j)} \partial x^{(i)}} g(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} g(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} h(\mathbf{x}) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{(j)} \partial x^{(i)}} h(\mathbf{x}) [g(\mathbf{x}) - g(\boldsymbol{\mu})] + \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} h(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} g(\mathbf{x}) \right] \right\} h^2(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \\
&= \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{(j)} \partial x^{(i)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} h(\boldsymbol{\mu}) + \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{(j)} \partial x^{(i)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} [g(\boldsymbol{\mu}) - g(\boldsymbol{\mu})] + \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \right] \right\} h^2(\boldsymbol{\mu}) \\
&= \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^{(j)} \partial x^{(i)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} h(\boldsymbol{\mu}) + \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \right\} h^2(\boldsymbol{\mu}),
\end{aligned}$$

a v_2 je:

$$\begin{aligned}
v_2 &= \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x^{(j)}} g(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} h(\mathbf{x}) [g(\mathbf{x}) - g(\boldsymbol{\mu})] \right] 2h(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} h(\mathbf{x}) \right\} \Big|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x^{(j)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} h(\boldsymbol{\mu}) - \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} [g(\boldsymbol{\mu}) - g(\boldsymbol{\mu})] \right] 2h(\boldsymbol{\mu}) \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \\
&= 2 \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} h^2(\boldsymbol{\mu}).
\end{aligned}$$

Takže:

$$\begin{aligned}
a_{i,j} &= \frac{1}{h^2(\boldsymbol{\mu})} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{(j)} \partial x^{(i)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} h(\boldsymbol{\mu}) - \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \right] \\
&= \frac{1}{8} \left[2\sqrt{2} \frac{\partial^2}{\partial x^{(j)} \partial x^{(i)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} - \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \right].
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Pre výpočet $a_{i,j}$ vidíme, že budeme potrebovať prvé a druhé parciálne derivácie $g(\mathbf{x})$ a prvé parciálne derivácie $h(\mathbf{x})$ v bode $\boldsymbol{\mu}$.

Hodnoty 1. derivácie $g(\mathbf{x})$ v bode $\boldsymbol{\mu}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^{(1)}}g(\mathbf{x})|_{x=\boldsymbol{\mu}} &= -2(x^{(i)})|_{x=\boldsymbol{\mu}} = -2, \\ \frac{\partial}{\partial x^{(2)}}g(\mathbf{x})|_{x=\boldsymbol{\mu}} &= 1, \\ \frac{\partial}{\partial x^{(3)}}g(\mathbf{x})|_{x=\boldsymbol{\mu}} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x^{(4)}}g(\mathbf{x})|_{x=\boldsymbol{\mu}} &= 0.\end{aligned}$$

Tabuľka s druhými deriváciami funkcie $g(\mathbf{x})$ v bode $\boldsymbol{\mu}$:

$\frac{\partial^2}{\partial x^{(i)}\partial x^{(j)}}g(\mathbf{x}) _{x=\boldsymbol{\mu}}$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
$j = 1$	-2	0	0	0
$j = 2$	0	0	0	0
$j = 3$	0	0	0	0
$j = 4$	0	0	0	0

Tabuľka 3.1: Tabuľka 2. derivácií $g(\mathbf{x})$ v bode $\boldsymbol{\mu}$.

Hodnoty 1. derivácie $h(\mathbf{x})$ v bode $\boldsymbol{\mu}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^{(1)}}h(\mathbf{x})|_{x=\boldsymbol{\mu}} &= \frac{1}{2h(\mathbf{x})}(-4x^{(3)} + 16x^{(1)}x^{(2)} - 16(x^{(1)})^3)|_{x=\boldsymbol{\mu}} = -\sqrt{2}, \\ \frac{\partial}{\partial x^{(2)}}h(\mathbf{x})|_{x=\boldsymbol{\mu}} &= \frac{1}{2h(\mathbf{x})}(8(x^{(1)})^2 - 2x^{(2)})|_{x=\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \\ \frac{\partial}{\partial x^{(3)}}h(\mathbf{x})|_{x=\boldsymbol{\mu}} &= \frac{1}{2h(\mathbf{x})}(-4x^{(1)})|_{x=\boldsymbol{\mu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \\ \frac{\partial}{\partial x^{(4)}}h(\mathbf{x})|_{x=\boldsymbol{\mu}} &= \frac{1}{2h(\mathbf{x})}(1)|_{x=\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{8}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Tým pádom jednotlivé hodnoty a_{ij} sú v tabuľke nižšie:

a_{ij}	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
$j = 1$	$-\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{8}\sqrt{2}$	$\frac{1}{32}\sqrt{2}$
$j = 2$	$\frac{1}{4}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{8}\sqrt{2}$	$\frac{1}{16}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{64}\sqrt{2}$
$j = 3$	$-\frac{1}{8}\sqrt{2}$	$\frac{1}{16}\sqrt{2}$	0	0
$j = 4$	$\frac{1}{32}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{64}\sqrt{2}$	0	0

Tabuľka 3.2: Hodnoty $a_{i,j}$.

Tým sme odvodili hodnoty pre a_i a $a_{i,j}$.

3.1.3 Výpočet μ_{i_1, i_2} a μ_{i_1, i_2, i_3}

Nadalej pre výpočet $p_1(x)$ potrebujeme aj hodnoty μ_{i_1, i_2} a μ_{i_1, i_2, i_3} z (2.12). Pre sprehľadnenie zápisu označíme \mathbf{X} ako náhodný vektor s rovnakým rozdelením ako \mathbf{X}_i , pre ľubovoľné $i \in \{1, \dots, n\}$.

$$\mu_{i_1, i_2} = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^{(i_1)}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^{(i_2)}],$$

a

$$\mu_{i_1, i_2, i_3} = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^{(i_1)}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^{(i_2)}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^{(i_3)}].$$

V nasledujúcej tabuľke sú uvedené hodnoty μ_{i_1, i_2} pre $i_1, i_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$.

μ_{i_1, i_2}	$i_1 = 1$	$i_1 = 2$	$i_1 = 3$	$i_1 = 4$
$i_2 = 1$	1	4	18	96
$i_2 = 2$	4	20	108	672
$i_2 = 3$	18	108	684	4896
$i_2 = 4$	96	672	4896	39744

Tabuľka 3.3: Hodnoty μ_{i_1, i_2} , pre $i_1, i_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Môžeme si všimnúť, že tabuľky 3.1, 3.2 a 3.3 sú symetrické.

Zo vzorcov (2.18) je možné vidieť, že nepotrebujeme všetky hodnoty v tabuľke 3.2, keďže všetky členy pri μ_{i_1, i_2} , pre $i_1, i_2 \in \{3, 4\}$ sú nulové, ale keďže sa jednalo o 4 hodnoty, tak sme ich doplnili pre demonštráciu výpočtu μ_{i_1, i_2} .

Pre hodnoty μ_{i_1, i_2, i_3} , pre $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, 3, 4\}$ sa môžeme pozrieť na vzorec pre výpočet A_3 z (2.18). Keďže vidíme, že μ_{i_1, i_2, i_3} sa nachádza v sume pri člene $a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3}$, a naďalej zo vzorcov (3.2) vidíme, že člen $a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3}$ bude nenulový len pre hodnoty $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2\}$. Z toho dôvodu nám stačí len dopočítavať hodnoty pre μ_{i_1, i_2, i_3} , kde $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2\}$.

Hodnoty pre μ_{i_1, i_2, i_3} sú v nasledujúcich tabuľkách

μ_{i_1, i_2, i_3}	$i_1 = 1$	$i_1 = 2$
$i_2 = 1$	2	12
$i_2 = 2$	12	80

Tabuľka 3.4: Hodnoty pre μ_{i_1, i_2, i_3} pre $i_3 = 1$.

μ_{i_1, i_2, i_3}	$i_1 = 1$	$i_1 = 2$
$i_2 = 1$	12	80
$i_2 = 2$	80	592

Tabuľka 3.5: Hodnoty pre μ_{i_1, i_2, i_3} pre $i_3 = 2$.

Tým sme vypočítali μ_{i_1, i_2, i_3} a μ_{i_1, i_2} potrebné pre výpočet p_1 .

3.1.4 Výpočet p_1

Vypočítame p_1 pomocou vzorcov (2.20) a (2.18).

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^4 \sum_{i_2=1}^4 a_{i_1, i_2} \mu_{i_1, i_2} = -\frac{15}{4} \sqrt{2}, \\ \sigma^2 &= \sum_{i_1=1}^4 \sum_{i_2=1}^4 a_{i_1} a_{i_2} \mu_{i_1, i_2} = 1, \\ A_3 &= \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d \sum_{i_3=1}^d a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} \mu_{i_1, i_2, i_3} + 3 \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d \sum_{i_3=1}^d \sum_{i_4=1}^d a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3, i_4} \mu_{i_1, i_2} \mu_{i_3, i_4} \\ &= \frac{15}{2} \sqrt{2} + 3 \left(-\frac{29}{4} \sqrt{2} \right) = -\frac{57}{4} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Môžeme vidieť, že $\sigma^2 = 1$, čo je dané tým, že máme $A(\mathbf{x})$ už normalizované. Takže z (2.20) vyplýva, že:

$$p_1(x) = -A_1 \sigma^{-1} - \frac{1}{6} A_3 \sigma^{-3} (x^2 - 1) = \frac{15}{4} \sqrt{2} + \left(\frac{19}{8} \sqrt{2} \right) (x^2 - 1). \quad (3.4)$$

3.1.5 Vyjadrenie Edgeworthovho rozvoja

Na základe predošlých výpočtov môžeme rozdelenie odhadu rozptylu súčtu exponenciálneho rozdelenia za pomoci $\bar{W}_n^2 - (\bar{W}_n)^2$ aproximovať pomocou Edgeworthovho rozvoja túto pravdepodobnosť:

$$P\left(n^{1/2} \frac{(\bar{W}_n^2 - (\bar{W}_n)^2) - 1}{\sqrt{n^{-1} \sum_{i=1}^n (W_i - \bar{W}_i)^4 - (\bar{W}_n^2 - (\bar{W}_n)^2)^2}} \leq x\right),$$

aproximujeme pomocou:

$$\Phi(x) + n^{-1/2} \left[\frac{15}{4} \sqrt{2} + \left(\frac{19}{8} \sqrt{2} \right) (x^2 - 1) \right] \phi(x) \quad (3.5)$$

s chybou $o(n^{-1/2})$.

Videli sme, že výpočet $p_1(x)$ nie je závislý na n , a teda vzorec platí pre ľubovoľné n . Vo výpočte sa využíval fakt, že sme poznali momenty exponenciálneho rozdelenia, a teda tento vzorec platí pre odhad rozdelenia štandardizovaného výberového rozptylu exponenciálneho rozdelenia so strednou hodnotou 1. Pre strednú hodnotu λ tento vzorec platí pre aproximáciu výrazu:

$$P\left(n^{1/2} \frac{(\bar{W}_n^2 - (\bar{W}_n)^2) - \lambda^2}{\sqrt{n^{-1} \sum_{i=1}^n (W_i - \bar{W}_i)^4 - (\bar{W}_n^2 - (\bar{W}_n)^2)^2}} \leq x\right).$$

Pre náš prípad rozdelenia výberového rozptylu troch exponenciálnych veličín stačí zvoliť $n = 3$.

3.1.6 Cornish-Fisherov rozvoj

Pre výpočet jednotlivých kvantilov môžeme použiť Cornish-Fisherov rozvoj za pomoci (2.26) a (3.4). Z toho vyplýva, že

$$w_\alpha = u_\alpha + n^{-1/2} \left[-\frac{15}{4}\sqrt{2} - \left(\frac{19}{8}\sqrt{2}\right)(u_\alpha^2 - 1) \right] + o(n^{-1/2}),$$

kde w_α je α -kvantil veličiny $n^{-1/2}A(\bar{\mathbf{X}}_n)$, zavedenej v kapitole 3, v časti zavedenie odhadu, a u_α je α -kvantil štandardného normálneho rozdelenia.

3.1.7 Porovnanie s Monte Carlom

V tejto kapitole porovnáme Edgeworthov rozvoj (3.5) s aproximáciou pomocou metódy Monte Carlo a normálnym rozdelením. Označme:

$$F_{edge}(x) = \Phi(x) + n^{-1/2} \left[\frac{15}{4}\sqrt{2} + \left(\frac{19}{8}\sqrt{2}\right)(x^2 - 1) \right] \phi(x),$$

a

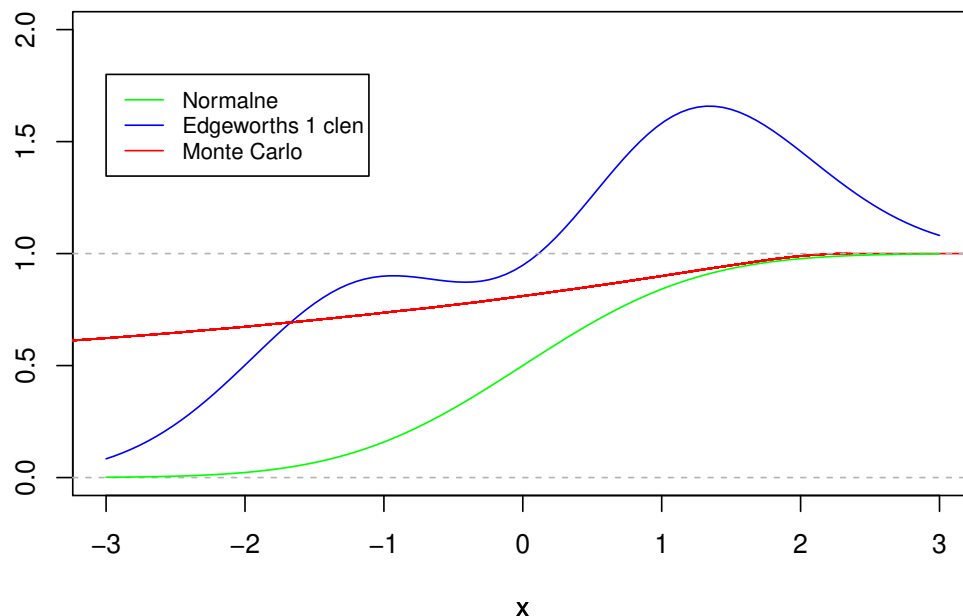
$$F_{norm}(x) = \Phi(x),$$

a

$$F_{MC}(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{I} \left\{ n^{1/2} \frac{(\bar{W}_{n,j}^2 - (\bar{W}_{n,j})^2) - 1}{\sqrt{n^{-1} \sum_{i=1}^n (W_{i,j} - \bar{W}_{i,j})^4 - (\bar{W}_{n,j}^2 - (\bar{W}_{n,j})^2)^2}} \leq x \right\},$$

kde N je počet generovaní a j je j -ta generácia n -tíc W_i z exponenciálneho rozdelenia.

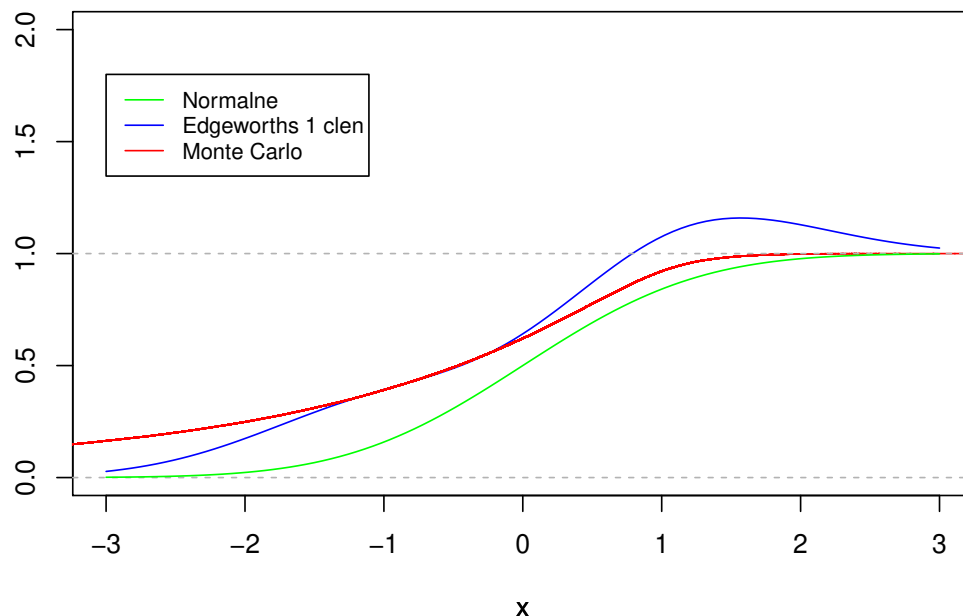
Grafické porovnanie jednotlivých rozdelení pre $n = 3$ a $N = 100\,000$ je na nasledujúcom grafe.



Obrázek 3.1: Jednotlivé aproximácie.

Z obrázka 3.1 je vidieť, že distribučná funkcia normálneho rozdelenia, a ani Edgeworthov rozvoj s jedným členom, nepopisujú dostatočne dobre rozdelenie. Navyše Edgeworthov rozvoj sa dostal nad hodnotu 1, čo je dané chybou $o(n^{-1/2})$ tohto rozvoja. Tým pádom je pre túto situáciu ($n = 3$) Edgeworthov rozvoj nepoužiteľný (oproti príkladu z kapitoly 1). Ale ak by sme však zobrali n väčšie než 3, tak uvidíme, že Edgeworthov rozvoj sa začne blížiť k požadovanému rozdeleniu.

Grafické porovnanie jednotlivých rozdelení pre $n = 30$ a $N = 100\,000$ je na grafe nižšie.



Obrázek 3.2: Jednotlivé aproximácie.

Z obrázka 3.2 je vidieť, že pre $n = 30$ Edgeworthov rozvoj lepšie aproximuje rozdelenie, než tomu bolo pri rozdelení s $n = 3$.

Ďalej porovnáme rozdelenie s jedným členom Edgeworthovho rozvoja a bez neho na základe veličiny K .

$$K_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_{MC}(x) - F_n(x)|,$$

kde za $F_n(x)$ budeme uvažovať $F_{edge}(x)$ alebo $F_{norm}(x)$.

Pre jednotlivé n sú zhodnotené informácie v nasledujúcej tabuľke:

Aproximácia / hodnota K_n	$n = 3$	$n = 30$	$n = 100$	$n = 1000$
Normálna aproximácia	0.651	0.245	0.139	0.045
Edgeworthov rozvoj s 1 členom	0.580	0.137	0.052	0.011

Tabuľka 3.6: Porovnanie hodnôt veličiny K_n u jednotlivých aproximácií.

Z tabuľky 3.6 môžeme vidieť, že na základe K_n je Edgeworthov rozvoj bližšie ku aproximácii Monte Carlom, než aproximácia normálnym rozdelením.

3.1.8 Porovnanie kvantilov

V tejto časti môžeme porovnať jednotlivé kvantily pre rôzne n a α , a pevné $N = 100\,000$ pre Monte Carlo.

Kvantily pre $\alpha = 0.01$ a ($u_{0.01} = -2.32$):

Aproximácia / hodnota	$n = 3$	$n = 30$	$n = 100$	$n = 1000$
Cornish-Fisher 1 člen	-13.943	-6.000	-4.338	-2.962
Monte Carlo	-1225.810	-11.368	-5.582	-3.098

Tabulka 3.7: Porovnanie aproximácii kvantilov pre $\alpha = 0.01$.

Kvantily pre $\alpha = 0.05$ a ($u_{0.05} = -1.65$):

Aproximácia / hodnota	$n = 3$	$n = 30$	$n = 100$	$n = 1000$
Cornish-Fisher 1 člen	-8.014	-3.658	-2.748	-1.993
Monte Carlo	-205.158	-6.150	-3.383	-2.076

Tabulka 3.8: Porovnanie aproximácii kvantilov pre $\alpha = 0.05$.

Kvantily pre $\alpha = 0.95$ a ($u_{0.95} = 1.65$):

Aproximácia / hodnota	$n = 3$	$n = 30$	$n = 100$	$n = 1000$
Cornish-Fisher 1 člen	-4.724	-0.369	0.541	1.295
Monte Carlo	1.521	1.146	1.222	1.411

Tabulka 3.9: Porovnanie aproximácii kvantilov pre $\alpha = 0.95$.

Kvantily pre $\alpha = 0.99$ a ($u_{0.99} = 2.32$):

Aproximácia / hodnota	$n = 3$	$n = 30$	$n = 100$	$n = 1000$
Cornish-Fisher 1 člen	-9.290	-1.347	0.314	1.690
Monte Carlo	2.012	1.607	1.666	1.923

Tabulka 3.10: Porovnanie aproximácii kvantilov pre $\alpha = 0.99$.

Z tabuliek 3.9 a 3.10 vidíme, že pre $n \in \{3, 30, 100\}$ Cornish Fisherova aproximácia kvantilu pre $\alpha = 0.95$ je väčšia než pre $\alpha = 0.99$. Tento problém vzniká vďaka tomu, že aproximujeme jednotlivé kvantily polynomicou funkciou kvantilu štandardného normálneho rozdelenia. Môže sa stať, že kvantil pre väčšiu hodnotu α bude menší, než kvantil pre menšiu hodnotu α .

3.2 Aproximácia rozdelenia štandardizovaného výberového priemeru

V tejto časti sa pokúsime aproximovať rozdelenie t -štatistiky a rozdelenie štandardizovaného výberového priemeru rovnako rozdelených nezávislých veličín a porovnáme túto aproximáciu s aproximáciou normálnym rozdelením a Študentovým t -rozdelením.

3.2.1 Zavedenie pojmu t -štatistika

Na začiatok si zavedieme t -štatistiku. Pre jednoduchšie porovnanie neskôr s Edgeworthovým rozvojom, budeme označovať náhodné veličiny W_i miesto častejšieho označenia X_i .

Nech W_1, \dots, W_n sú nezávislé náhodné veličiny so strednou hodnotou μ a konečným rozptylom σ^2 . Nech

$$\bar{W}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i, \text{ a } \tilde{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (W_i - \bar{W}_n)^2,$$

potom

$$T_n = n^{1/2} \frac{\bar{W}_n - \mu}{\tilde{\sigma}_n}.$$

T_n budeme nazývať t -štatistika a ak W_i pochádza z normálneho rozdelenia, tak T_n má Študentovo t -rozdelenie s $n - 1$ stupňami voľnosti (Anděl (2007, str. 73)). A pre W_1, \dots, W_n z rozdelenia s konečným rozptylom, platí:

$$T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} N(0,1).$$

Nadalej budeme odvodzovať Edgeworthov rozvoj pre výberový priemer nezávislých veličín.

3.2.2 Edgeworthov rozvoj pre štandardizovaný výberový priemer nezávislých rovnako rozdelených veličín

Nech máme náhodný výber W_1, \dots, W_n a chceli by sme aproximovať jeho výberový priemer pomocou Edgeworthovho rozvoja, potom podľa príkladu hladkých transformácií v kapitole 2 označme $\mathbf{X}_i = \{W_i, W_i^2\}^T$, $\boldsymbol{\mu} = \{E[W_i], E[W_i^2]\}^T$,

$$g(\mathbf{x}) = x^{(1)}, \text{ a } h^2(\mathbf{x}) = x^{(2)} - (x^{(1)})^2.$$

Potom:

$$n^{1/2} A(\mathbf{x}) = n^{1/2} \frac{g(\mathbf{x}) - g(\boldsymbol{\mu})}{h(\mathbf{x})},$$

a

$$n^{1/2} A(\bar{\mathbf{X}}_n) = n^{1/2} \frac{\bar{W}_n - \mu^{(1)}}{\sqrt{\bar{W}_n^2 - \bar{W}_n^2}}.$$

Toto môžeme prepísať do tvaru:

$$n^{1/2}A(\bar{\mathbf{X}}_n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{1/2} n^{1/2} \frac{\bar{W}_n - \mu^{(1)}}{\tilde{\sigma}_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{1/2} T_n.$$

Ak by sme pomocou Edgeworthovho rozvoja aproximovali t -štatistiku, tak dostávame:

$$P\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^{1/2} n^{1/2} \frac{\bar{W}_n - \mathbf{E}(W_i)}{\tilde{\sigma}_n} \leq x\right) = P\left(T_n \leq \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} x\right).$$

3.2.3 Predpoklady pre Edgeworthov rozvoj

Pokiaľ chceme použiť Edgeworthov rozvoj s jedným členom rozdelenie náhodného vektora \mathbf{X}_j , musí podľa vety 1 z kapitoly 2 spĺňať $\mathbf{E}(\|\mathbf{X}_j\|^3) < \infty$ a

$$\limsup_{\|t\| \rightarrow \infty} |\mathbf{E} \exp(i\langle \mathbf{X}_j, t \rangle)| < 1.$$

Druhá podmienka je splnená ak \mathbf{X}_j pochádza zo spojitého rozdelenia (pozri Hall (1992, str. 65-67)).

3.2.4 Výpočet prvého člena Edgeworthovho rozvoja

Teraz budeme pokračovať pomocou vzorca (2.18) pre výpočet $p_1(x)$. Výpočet a_{i_1} :

$$a_{i_1} = \frac{\frac{\partial}{\partial x^{(i)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}}}{h(\boldsymbol{\mu})}$$

Nadalej:

$$\frac{\partial}{\partial x^{(1)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} = 1$$

a

$$\frac{\partial}{\partial x^{(2)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} = 0$$

z čoho vyplýva, že:

$$a_1 = \frac{1}{h(\boldsymbol{\mu})}, \text{ a } a_2 = 0.$$

Z predchádzajúceho príkladu a vzorca (3.3) vieme, že

$$a_{i,j} = \frac{1}{h^2(\boldsymbol{\mu})} \left[h(\boldsymbol{\mu}) \frac{\partial^2}{\partial x^{(j)} \partial x^{(i)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} - \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} - \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} \right].$$

V tomto prípade všetky 2. parciálne derivácie $g(\mathbf{x})$ sú nulové, takže budeme pokračovať hodnotami pre $\frac{\partial}{\partial x^{(i)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}}$.

$$\frac{\partial}{\partial x^{(1)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{2h(\boldsymbol{\mu})} (-2x^{(1)})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} = -\frac{\mu^{(1)}}{h(\boldsymbol{\mu})},$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{(1)}} h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{2h(\boldsymbol{\mu})} = \frac{1}{2h(\boldsymbol{\mu})},$$

Teraz môžeme spočítat hodnoty pre a_{i_1, i_2} :

a_{i_1, i_2}	$i_1 = 1$	$i_1 = 2$
$i_2 = 1$	$\frac{2 \mathbb{E}(W_i)}{h^3(\boldsymbol{\mu})}$	$-\frac{1}{2h^3(\boldsymbol{\mu})}$
$i_2 = 2$	$-\frac{1}{2h^3(\boldsymbol{\mu})}$	0

Tabulka 3.11: Hodnoty a_{i_1, i_2} , pre $i_1, i_2 \in \{1, 2\}$.

Tým sme spočítali hodnoty a_{i_1} a a_{i_1, i_2} , kde vieme, že $h^2(\boldsymbol{\mu}) = \text{var}(W_i)$.

V nasledujúcej tabuľke sú zhrnuté hodnoty pre μ_{i_1, i_2} .

μ_{i_1, i_2}	$i_1 = 1$	$i_1 = 2$
$i_2 = 1$	$\mathbb{E}(W_i^2) - (\mathbb{E}(W_i))^2$	$\mathbb{E}(W_i^3) - \mathbb{E}(W_i^2) \mathbb{E}(W_i)$
$i_2 = 2$	$\mathbb{E}(W_i^3) - \mathbb{E}(W_i^2) \mathbb{E}(W_i)$	$\mathbb{E}(W_i^4) - (\mathbb{E}(W_i^2))^2$

Tabulka 3.12: Hodnoty μ_{i_1, i_2} , pre $i_1, i_2 \in \{1, 2\}$.

Pre výpočet μ_{i_1, i_2, i_3} sa pozrieme na výraz A_3 zo vzorcov (2.18), kde vidíme vzhľadom na to že $a_2 = 0$, že jediná potrebná hodnota je hodnota $\mu_{1,1,1}$.

$$\mu_{1,1,1} = \mathbb{E}(W_i^3) - 3 \mathbb{E}(W_i^2)(\mathbb{E}(W_i))^2 + 2(\mathbb{E}(W_i))^3.$$

3.2.5 Vyjadrenie p_1 a Edgeworthova aproximácia

Teraz dosadíme hodnoty do vzorcov pre A_1, σ^2, A_2 .

Výpočet pre A_1 :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \left[\frac{2 \mathbb{E}(W_i)}{h^3(\boldsymbol{\mu})} (\mathbb{E}(W_i^2) - (\mathbb{E}(W_i))^2) - 2 \frac{1}{2h^3(\boldsymbol{\mu})} (\mathbb{E}(W_i^3) - \mathbb{E}(W_i^2) \mathbb{E}(W_i)) \right] \\ &= -\frac{1}{2h^3(\boldsymbol{\mu})} \left[\mathbb{E}(W_i^3) - 3 \mathbb{E}(W_i^2)(\mathbb{E}(W_i))^2 + 2(\mathbb{E}(W_i))^3 \right] \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\mathbb{E}(W_i - \mathbb{E}(W_i))^3}{(\mathbb{E}(W_i^2) - (\mathbb{E}(W_i))^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Výpočet pre σ^2 :

$$\sigma^2 = \frac{\mu_{1,1}}{h^2(\boldsymbol{\mu})} = 1.$$

Výpočet pre A_3 :

$$\begin{aligned}
A_3 &= \frac{\mu_{1,1,1}}{h^3(\mu)} + 3 \left[\frac{\mu_{1,1}}{h^2(\mu)} \right] \left[\sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d a_{i_1, i_2} \mu_{i_1, i_2} \right] \\
&= \frac{\mathbb{E} \left(W_i - \mathbb{E}(W_i) \right)^3}{\left(\mathbb{E}(W_i^2) - (\mathbb{E}(W_i))^2 \right)^{3/2}} + 3(2A_1) \\
&= \frac{\mathbb{E} \left(W_i - \mathbb{E}(W_i) \right)^3}{\left(\mathbb{E}(W_i^2) - (\mathbb{E}(W_i))^2 \right)^{3/2}} - 3 \frac{\mathbb{E} \left(W_i - \mathbb{E}(W_i) \right)^3}{\left(\mathbb{E}(W_i^2) - (\mathbb{E}(W_i))^2 \right)^{3/2}} \\
&= -2 \frac{\mathbb{E} \left(W_i - \mathbb{E}(W_i) \right)^3}{\left(\mathbb{E}(W_i^2) - (\mathbb{E}(W_i))^2 \right)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Nadalej označme:

$$\gamma = \frac{\mathbb{E} \left(W_i - \mathbb{E}(W_i) \right)^3}{\left(\mathbb{E}(W_i^2) - (\mathbb{E}(W_i))^2 \right)^{3/2}}.$$

Poznámka: γ sa nazýva šikmosť veličiny W_i , a pokiaľ W_i pochádza zo symetrického rozdelenia, tak $\gamma = 0$.

Potom prvý člen Edgeworthovho rozvoja je v tvare

$$p_1(x) = \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{3}\gamma(x^2 - 1) = \frac{1}{6}\gamma(2x^2 + 1),$$

a teda pravdepodobnosť

$$P\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} T_n \leq x\right),$$

aproximujeme pomocou výrazu

$$\Phi(x) + \frac{1}{6}n^{-1/2}\gamma(2x^2 + 1)\phi(x).$$

Tým pádom pre pravdepodobnosť T_n

$$P\left(T_n \leq y\right)$$

môžeme aproximovať pomocou:

$$\Phi\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} y\right) + \frac{1}{6}n^{-1/2}\gamma\left(2\frac{n-1}{n}y^2 + 1\right)\phi\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} y\right). \quad (3.6)$$

Zo vzorca (3.6) môžeme vidieť, že pokiaľ W_i pochádzajú zo symetrického rozdelenia, tak

$$P\left(T_n \leq y\right) = \Phi\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} y\right) + o(n^{-1/2}).$$

Tým sme odvodili Edgeworthov rozvoj s jedným členom pre výberový priemer. Následne sme odvodili Edgeworthov rozvoj pre T_n a ako sa mení tento rozvoj ak W_i pochádzajú zo symetrického rozdelenia.

3.2.6 Aproximácia kvantilov výberového priemeru založená na Cornish-Fisherovej aproximácii

Pre aproximáciu kvantilov náhodnej veličiny $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{1/2} n^{1/2} \frac{\bar{W}_n - E(W_i)}{\sigma_n}$ použijeme (2.26) Cornish-Fisherov rozvoj.

$$w_\alpha = u_\alpha - \frac{1}{6} n^{-1/2} \gamma (2u_\alpha^2 + 1).$$

A keďže pre aproximáciu platí, že:

$$P\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^{1/2} T_n \leq w_\alpha + o(n^{-1/2})\right) = \alpha,$$

potom aproximácia kvantilu pomocou Cornish-Fisherovej aproximácie pre T_n je $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{1/2} w_\alpha$. Naďalej ak W_i pochádzajú zo symetrického rozdelenia, tak $w_\alpha = u_\alpha$, a následne kvantily T_n pre W_i zo symetrického rozdelenia budú v tvare $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{1/2} u_\alpha$.

Tým sme skončili odvodzovanie Edgeworthovho rozvoja rozdelenia výberového priemeru a jeho porovnanie s t -štatistikou, kde sme prišli na to, že celý polynóm p_1 je nulový ak W_i pochádzajú zo symetrického rozdelenia.

Záver

V tejto práci sme sa venovali Edgeworthovmu rozvoju, jeho odvodeniu a jeho následnému použitiu na príkladoch. V rámci tejto práce sme zaviedli pojem hladkej transformácie náhodného vektora a následne sme ukázali Edgeworthov rozvoj, ktorý slúži pre aproximáciu distribučnej funkcie.

Edgeworthov rozvoj je v tvare súčtu distribučnej funkcie normálneho rozdelenia a sumy, kde jednotlivé členy sú v tvare súčinu rozsahu výberu na danú mocninu, polynómu (ktorý nezávisí na rozsahu výberu) a hustoty normálneho rozdelenia. Práve kvôli tomuto tvaru musíme brať do úvahy, že aproximácia distribučnej funkcie pomocou Edgeworthovho rozvoja nemusí spĺňať vlastnosti distribučnej funkcie. A to vlastnosť, že distribučná funkcia je neklesajúca, a tiež vlastnosť, že distribučná funkcia je obmedzená zdola 0 a zhora 1 (ako bolo ukázané na príkladoch).

Naďalej sme na príkladoch porovnali použitie Edgeworthovej aproximácie s aproximáciou pomocou normálneho rozdelenia. V príkladoch sme na porovnanie využili grafy jednotlivých aproximácií a suprémum z absolútnej hodnoty rozdielu distribučnej funkcie pravého rozdelenia, jej numerickej aproximácie, aproximácie normálnym rozdelením, alebo Edgeworthovým rozvojom. V našich príkladoch Edgeworthov rozvoj obstál lepšie než aproximácia pomocou normálneho rozdelenia v zmysle, že bola podľa supréma rozdielu distribučných funkcií bližšie k reálnemu rozdeleniu alebo jeho numerickej aproximácie.

V práci sme ešte zaviedli pojem Cornish-Fisherovej aproximácie kvantilov a ukázali sme ich odvodenie pomocou Edgeworthovej aproximácie. Pretože táto aproximácia kvantilov je založená na Edgeworthovom rozvoji, tak i táto aproximácia má problémy typu: Ak $\alpha_1 < \alpha_2$, tak kvantil pre α_2 môže mať menšiu hodnotu, než kvantil pre α_1 .

Polynómy Edgeworthovho rozvoja vďaka tomu, že nezávisia na rozsahu výberu, sa dajú odvodiť a následne opakovane použiť pre rôzne rozsahy výberov a pri niektorých transformáciách aj pre rôzne hodnoty parametrov pôvodného rozdelenia.

Pre budúce pokračovanie tejto práce by sa dalo Edgeworthovmu rozvoju venovať v rámci odhadu momentov alebo kumulantov a následného dosadenia do výpočtu polynómov pre Edgeworthov rozvoj. V tejto práci sa predpokladá jasne známe rozdelenie a s tým i jasne dané kumulanty a momenty. Obvykle v reálnych situáciách pri odhade parametrov a následných testov hypotéz nie je rozdelenie známe, a teda ak by sa mal Edgeworthov rozvoj použiť v nejakej z týchto situácií, bolo by vhodné uvažovať nie pravé hodnoty momentov a kumulantov, ale ich odhady a následne dopady týchto odhadov na presnosť Edgeworthovho rozvoja.

4. Apendix

4.1 Momentová vytvárajúca funkcia a jej vlastnosti

Definícia 2 (Dupač a Hušková, 2005, str. 24). *Pre náhodnú veličinu X definujeme momentovú vytvárajúca funkciu ako:*

$$M_X(t) = E e^{tx},$$

pre $t \in \mathbb{R}$.

Veta 3 (Dupač a Hušková, 2005, str. 27). *Nech $M_X(t)$ je momentová vytvárajúca funkcia náhodnej veličiny X taká, že $M_X(t) < +\infty$, pre $|t| \leq t_0$, kde $0 < t_0 < +\infty$. Potom $E |X|^r < +\infty$ pre všetky $r > 0$ a platí:*

$$\frac{\partial^r}{\partial t^r} M_X(t)|_{t=0} = E[X^r],$$

kde $r = 1, 2, \dots$.

4.2 Charakteristická funkcia a jej vlastnosti

Definícia 3 (Lachout, 2004, str. 60). *Pre komplexnú náhodnú veličinu X definovanú na pravdepodobnostnom priestore (Ω, \mathcal{A}, P) definujeme jej moment ako $E X = E \operatorname{Re} X + i E \operatorname{Im} X$, pokiaľ integrál existuje.*

Pre reálne vektory $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^k$ budeme označovať skalárny súčin týchto dvoch vektorov ako $\langle \mathbf{s}, \mathbf{t} \rangle$.

Definícia 4 (Lachout, 2004, str. 60). *Pre reálny náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_k)^T$ definujeme komplexnú funkciu*

$$\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = E \exp(i \langle \mathbf{X}, \mathbf{t} \rangle), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^k,$$

a budeme ju nazývať charakteristickou funkciou náhodného vektora \mathbf{X} .

Veta 4 (Lachout, 2004, str. 63). *Nech pre náhodnú veličinu X platí $E|X^p| < +\infty$ pre nejaké $p \in \mathbb{N}$.*

- *Potom $\psi_{\mathbf{X}}$ má všade na \mathbb{R} spojité obmedzené derivácie do rádu p (vrátane p) a platí.*

$$\psi_X^{(k)}(t) = i^k E [X^k e^{itX}] \text{ pre každé } k = 1, 2, \dots, p, t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Špeciálne pre } \psi_X^k(0) = i^k E [X^k] \text{ pre } k = 1, 2, \dots, p.$$

- Existuje Taylorov rozvoj

$$\psi_X(t+s) = \sum_{k=0}^p \frac{t^k}{k!} \psi_X^{(k)}(s) + \frac{t^p}{p!} \rho_p(t,s) \text{ pre každé } s, t \in \mathbb{R} \text{ kde}$$

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \sup_{s \in \mathbb{R}} |\rho_p(t,s)| = 0, |\rho_p(t,s)| \leq \sqrt{8} E |X|^p,$$

špeciálne

$$\psi_X(t) = \sum_{k=0}^p \frac{it^k}{k!} E X^k + \frac{t^p}{p!} \rho_p(t,0) \text{ pre každé } t \in \mathbb{R}.$$

Veta 5 (Lachout, 2004, str. 65). Nech pre náhodnú veličinu X platí $E|X^p| < +\infty$, pre každé $p \in \mathbb{N}$, a nech mocninná rada $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{E X^k}{k!} t^k$ má kladný polomer konvergencie $R > 0$.

Potom rozdelenie X je určené jednoznačne momentami a platí:

$$\psi_X(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \psi_X^{(k)}(s) \text{ pre každé } s, t \in \mathbb{R}, |t| < R,$$

špeciálne

$$\psi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} E X^k \text{ pre každé } |t| < R.$$

Veta 6 (Lachout, 2004, str. 67). Pre postupnosť reálnych náhodných vektorov $\mathbf{X}^{(n)} = (X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots, X_k^{(n)})^T, n \in \mathbb{N}$ a náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_k)^T$ platí:

$$X^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D} X \Leftrightarrow \psi_{\mathbf{X}^{(n)}}(\mathbf{t}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}), \text{ pre každé } \mathbf{t} \in \mathbb{R}^k.$$

4.3 Definícia O_p, o_p

Definícia 5 (Lachout, 2004, str. 24). Nech $a_n > 0, n \in \mathbb{N}$ je postupnosť čísel a $X_n, n \in \mathbb{N}$ je postupnosť reálnych náhodných veličín, potom:

- Hovoríme, že $X_n = o_p(a_n)$, ak pre každé $\varepsilon > 0$ platí $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n| > \varepsilon a_n) = 0$.
- Hovoríme, že $X_n = O_p(a_n)$, ak platí $\lim_{K \rightarrow +\infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} P(|X_n| > K a_n) = 0$.

4.4 Delta veta

Veta 7 (DasGupta, 2008, str. 41). Nech $\{\mathbf{T}_n\}$ je postupnosť d -dimenzionálnych náhodných vektorov taká, že:

$$n^{1/2}(\mathbf{T}_n - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D} N_d(\mathbf{0}, \Sigma(\boldsymbol{\theta})).$$

A nech $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ je derivovateľná v bode $\boldsymbol{\theta}$ s gradientom $\nabla g(\boldsymbol{\theta})$. Potom:

$$n^{1/2}(g(\mathbf{T}_n) - g(\boldsymbol{\theta})) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D} N(0, \nabla g(\boldsymbol{\theta})^T \Sigma(\boldsymbol{\theta}) \nabla g(\boldsymbol{\theta})).$$

4.5 Centrálna limitná veta

Veta 8 (Lachout, 2004, str. 81). *Pre nezávislé rovnako rozdelené d -rozmerné reálne náhodné vektory $\mathbf{X}_n, n \in \mathbb{N}$ a $E[\mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n] < +\infty$, platí:*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j - n E \mathbf{X}_1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D} N_d(\mathbf{0}, \text{var} \mathbf{X}_1).$$

Seznam použité literatury

- ANDĚL, J. (2007). *Základy matematické statistiky*. Druhé vydání. MatfyzPress, Praha. ISBN 80-7378-001-1.
- CRAMÉR, H. (1928). On the composition of elementary errors. *Scandinavian Actuarial Journal*, **1928**(1), 13–74. doi: 10.1080/03461238.1928.10416862.
- DASGUPTA, A. (2008). *Asymptotic Theory of Statistics and Probability*. I. Springer-Verlag New York, New York. ISBN 978-0-387-75971-5.
- DE BRUIJN, N. (1981). *Asymptotic Methods in Analysis*. Bibliotheca mathematica series 4. Dover Publications, New York. ISBN 9780486642215.
- DUPAČ, V. a HUŠKOVÁ, M. (2005). *Pravděpodobnost a matematická statistika*. 3. Karolinum, Praha. ISBN 80-246-0009-9.
- HALL, P. (1992). *The Bootstrap and Edgeworth Expansion*. II. Springer-Verlag New York, New York. ISBN 978-1-4612-4384-7.
- JARNÍK, V. (1984). *Diferenciální počet II*. Štvrté vydanie. Academia, Praha.
- KANNAN, R. a KRUEGER, C. (1996). *Advanced analysis: on the real line*. Universitext Series. Springer, New York. ISBN 9780387946429.
- LACHOUT, P. (2004). *Teorie pravděpodobnosti*. Druhé vydání. Karolinum, Praha. ISBN 80-246-0872-3.
- SHILOV, G., GUREVICH, B. a SILVERMAN, R. (1966). *Integral, measure, and derivative: a unified approach*. Dover books on advanced mathematics. Dover Publications, New York. ISBN 9780486635194.

Seznam obrázků

1.1	Porovnanie jednotlivých aproximací so skutočným rozdelením pre $n = 3$	21
1.2	Porovnanie rozdielu skutočného rozdelenia a jednotlivých aproximácií pre $n = 3$	21
1.3	Edgeworthova aproximácia o dvoch členoch.	23
1.4	Edgeworthova aproximácia o jednom člene.	23
3.1	Jednotlivé aproximácie.	47
3.2	Jednotlivé aproximácie.	48

Seznam tabulek

1.1	Porovnanie hodnôt veličiny K_n u jednotlivých aproximácií.	22
3.1	Tabuľka 2. derivácií $g(\mathbf{x})$ v bode $\boldsymbol{\mu}$	43
3.2	Hodnoty $a_{i,j}$	43
3.3	Hodnoty μ_{i_1,i_2} , pre $i_1,i_2 \in \{1,2,3,4\}$	44
3.4	Hodnoty pre μ_{i_1,i_2,i_3} pre $i_3 = 1$	44
3.5	Hodnoty pre μ_{i_1,i_2,i_3} pre $i_3 = 2$	44
3.6	Porovnanie hodnôt veličiny K_n u jednotlivých aproximácií.	48
3.7	Porovnanie aproximácií kvantilov pre $\alpha = 0.01$	49
3.8	Porovnanie aproximácií kvantilov pre $\alpha = 0.05$	49
3.9	Porovnanie aproximácií kvantilov pre $\alpha = 0.95$	49
3.10	Porovnanie aproximácií kvantilov pre $\alpha = 0.99$	49
3.11	Hodnoty a_{i_1,i_2} , pre $i_1,i_2 \in \{1,2\}$	52
3.12	Hodnoty μ_{i_1,i_2} , pre $i_1,i_2 \in \{1,2\}$	52

Prílohy

RCode_Priklad_kap_1.txt

RCode_Priklad_kap_2_exp.txt